

ANALISI ACUSTICA DI CAVITA' TRIDIMENSIONALI
CON TECNICHE AGLI ELEMENTI FINITI

A. Farina e S. Piva

Ist. di Fisica Tecnica - Facolta' di Ingegneria
Universita' di Bologna

RIASSUNTO

La previsione del livello sonoro in una cavita' e' difficile quando le sue dimensioni sono poco maggiori delle lunghezze d'onda indagate. Nel caso di cavita' di forma complessa il Metodo degli Elementi Finiti sembra dare le prestazioni migliori. In questo lavoro si presenta una soluzione ottenuta facendo impiego di tale tecnica, applicata allo studio di una cavita' di forma semplice, di cui e' disponibile una soluzione analitica di riscontro.

INTRODUZIONE

La previsione delle prestazioni acustiche di cavita' di forma complessa e' di grande interesse. Nel caso di assenza di moto e di viscosita' nulla, il problema si riconduce alla soluzione dell'equazione delle onde sotto opportune condizioni al contorno. Nonostante l'equazione delle onde sia oggetto di studio da molti anni, soluzioni in forma chiusa sono note solo per un numero limitato di casi. Per l'analisi di cavita' di forma complessa e' necessario ricorrere a metodi numerici. Fra tutti quelli considerati, il metodo che sembra fornire le prestazioni migliori e' il Metodo degli Elementi Finiti (MEF). Innanzi tutto esso presenta il vantaggio di essere generale sia rispetto alla geometria del sistema che alle proprieta' del mezzo, per cui possono essere facilmente presi in esame sistemi complessi composti di materiali diversi. In modo altrettanto generale possono essere poste le condizioni al contorno, sia sulla frontiera che all'interno dei domini. Si puo' dimostrare anche facilmente che esso converge alla soluzione esatta all'aumentare del numero degli elementi. Per questi motivi il MEF e' stato utilizzato per affrontare problemi di rilevate interesse pratico.

In campo automobilistico le indagini sono state rivolte allo studio dei modi propri e delle frequenze di risonanza dell'abitacolo dei veicoli [1]. Altre applicazioni hanno

interessato lo studio delle prestazioni acustiche delle stampanti ad aghi [2], che presentano cavita' di dimensioni relativamente piccole rispetto alle lunghezze d'onda della sorgente, con frequenze comprese fra 1500 e 2000 Hz a seconda della velocita' di stampa. Il MEF e' stato impiegato ancora per analizzare le prestazioni di sistemi acustici che includono espansioni, quali i silenziatori [3].

Nella maggioranza delle applicazioni incontrate, il MEF e' stato impiegato in forma bidimensionale. Infatti in molti casi e' possibile ricondurre lo studio di una cavita' ad un modello bidimensionale. E' questo il caso delle cavita' in cui il gradiente di pressione nella direzione laterale e' tanto modesto da poter essere trascurato, oppure quella delle cavita' di forma prismatica. In questi casi la cavita' puo' essere rappresentata dalla sua sezione longitudinale-verticale. Cio' riduce notevolmente le difficolta' del problema; tuttavia per cavita' di forma generica tale semplificazione non e' possibile ed e' necessario tenere conto della tridimensionalita' dei fenomeni in esame.

Nel presente lavoro si riporta un modello numerico agli elementi finiti messo a punto per la ricerca dei modi propri e delle frequenze di risonanza di cavita' tridimensionali racchiuse da pareti perfettamente rigide.

FORMULAZIONE MATEMATICA

I modi propri e le corrispondenti frequenze di risonanza di una cavita' V delimitata da pareti rigide, sono ricavabili dalla soluzione dell'equazione di Helmholtz:

$$\nabla^2 p + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p = 0 \quad (1)$$

sotto la condizione al contorno di parete rigida :

$$\frac{\partial p}{\partial \underline{n}} = 0 \quad (2).$$

L'equazione differenziale alle derivate parziali (1) e' stata risolta numericamente ricorrendo al Metodo degli Elementi Finiti (MEF), che consiste nella decomposizione del dominio in esame in elementi su cui si definisce una soluzione di tentativo. Sostituendo tale soluzione in (1) ha luogo un residuo R :

$$\nabla^2 \hat{p} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{p} = R \quad (3).$$

Imponendo che tale residuo sia ortogonale ad opportune

funzioni peso si perviene alla cosiddetto Metodo dei Residui Pesati [4]. Imponendo l'ortogonalita' del residuo rispetto alle funzioni approssimanti stesse ed integrando per parti il risultato, sostituendovi poi la condizione al contorno (2), si ottiene :

$$\int_V \left[\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \right] dV + \int_V \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \hat{p} \hat{p} dV = 0 \quad (4).$$

Nel presente lavoro il MEF e' stato applicato decomponendo il dominio V in tetraedri ed utilizzando come funzioni di forma polinomi completi di 1° grado :

$$\hat{p} = \sum_{i=1}^4 N_i(x,y,z) p_i \quad (5).$$

Sostituendo la (5) nella (4) si perviene ad un sistema:

$$[K](p) - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 [M](p) = 0 \quad (6),$$

dove le matrici [K] e [M] sono calcolate assemblando le corrispondenti calcolate per ogni singolo elemento della discretizzazione. Con riferimento ad un generico tetraedro il corrispondente termine della matrice di rigidezza risulta essere :

$$K_{ij} = \int_V \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} dV \quad (7);$$

il corrispondente termine della matrice delle masse risulta:

$$M_{ij} = \int_V N_i N_j dV \quad (8).$$

L'esame viene cosi' ricondotto alla soluzione di un problema agli autovalori posto in forma generale. Gli autovalori ottenuti forniscono le frequenze proprie di risonanza della cavita', mentre gli autovettori ne forniscono i modi propri.

Il ricorso all'applicazione di elementi finiti tridimensionali non presenta particolari difficolta' di implementazione; il suo impiego e' stato rallentato dai grandi tempi di calcolo (e costi) necessari, dovuti al grande numero di elementi (e quindi di incognite) richiesto e dalla difficolta' nella gestione dei reticoli tridimensionali. Tuttavia tale ricorso e' praticamente necessario nella maggioranza dei casi pratici.

Per fare fronte a queste difficolta' si e' cercato di

accelerare la soluzione sfruttando le proprietà algebriche del sistema (6) e limitando il numero degli autovalori ricercati, in modo da non impiegare tempo macchina per la ricerca di modi propri corrispondenti a frequenze superiori a 2000 Hz, di scarso interesse pratico.

E' stato inoltre necessario ricorrere a tecniche di generazione automatica dei reticoli tridimensionali. Infatti la suddivisione diretta in tetraedri dei volumi in esame e' risultata di difficile gestione; pertanto si e' ricorsi alla piu' semplice decomposizione in esaedri, da ognuno dei quali una apposita subroutine ricava cinque tetraedri (Fig.1).

I modi propri delle cavità sono stati restituiti graficamente ricorrendo a rappresentazioni tridimensionali che mostrano l'andamento delle isobare e la posizione dei piani nodali.

RISULTATI E CONFRONTI

E' stata analizzata una cavità di forma parallelepipedica, di dimensioni pari a 236x128x110 mm. E' stato impiegato un reticolo con 135 nodi, per complessivi 320 elementi tetraedrici. I risultati della previsione sono stati posti a confronto con quelli di [6], ottenuti descrivendo lo stesso volume con 141 nodi, ma impiegando elementi isoparametrici parabolici, e con la soluzione esatta teorica.

Nella seguente tabella sono posti a confronto i risultati ottenuti per i modi fino a 2000 Hz:

modo	$f_{\text{teor.}}$	f_{MEF}	f_{Petyt}
1,0,0	699	712	699
0,1,0	1250	1346	1255
2,0,0	1398	1444	1404
1,1,0	1432	1523	1437
0,0,1	1500	1702	1506
1,0,1	1655	1912	1660
2,1,0	1876	1999	1886
0,1,1	1953	2170	1963

Si può osservare che il MEF impiegato é risultato meno preciso di quello impiegato in [6], a parità di suddivisioni della cavità. Ciò e' prevedibile, data la minor capacità degli elementi tetraedrici ad interpolazione lineare di seguire correttamente la forma dell'onda stazionaria. Da qui la necessità di impiegare reticoli più raffittiti, per

ottenere comunque una sufficiente precisione dei risultati.

Un confronto più attendibile andrebbe comunque fatto non in base ad un ugual numero di suddivisioni, ma a parità di impiego di risorse di calcolo; esso però non è stato possibile perché in [6] non sono resi noti tali risultati.

Nella Fig. 2 viene riportata la forma del modo n. 4 (1,1,0), ottenuta dal modello MEF mediante un software di interpolazione grafica. Si può osservare una certa deformazione delle linee isolivello, che non corrono parallele ai lati del parallelogramma. Essa è stata attribuita alla scomposizione non simmetrica del singolo esaedro in tetraedri; questo effetto si riduce nettamente all'aumentare del numero di suddivisioni.

CONCLUSIONI

È stato sviluppato un codice di calcolo agli Elementi Finiti per la previsione delle frequenze proprie di risonanza e dei modi propri di cavità di forma qualsiasi. Il codice è stato provato su una cavità di forma semplice, della quale erano disponibili sia la soluzione teorica che i risultati di un altro codice di calcolo. Il confronto ha mostrato una certa imprecisione nei risultati ottenuti, attribuibile alla insufficiente suddivisione del volume in elementi; la forma dei modi previsti risente anche di una leggera deformazione, dovuta al tipo di scomposizione in elementi adottata. Il modello si presta allo studio di cavità di piccole dimensioni, ove è comunque possibile contenere il numero di elementi conservando sufficientemente piccola la dimensione massima degli elementi rispetto alle lunghezze d'onda in esame.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Nefske D.J., Wolf J.A. and Howell L.J., *J. Sound Vibration*, 80, 247-266 (1982).
- [2] Bernhard R.J. and Takeo S., *J. Acoustic. Soc. Am.* 83, 2224-2232 (1988).
- [3] Young C.I.J and Crocker M.J., *J. Acoustic. Soc. Am.*, 57, 144-148 (1975).
- [4] Finlayson B.A., *The method of weighted residuals and variational principles*, Academic Press, New York (1972).
- [5] Bahte K.J. and Wilson E.L., *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1975).
- [6] Petyt M., Lea J. and Koopmann G.H., *J. Sound Vibration*, 45, 495-502 (1976).

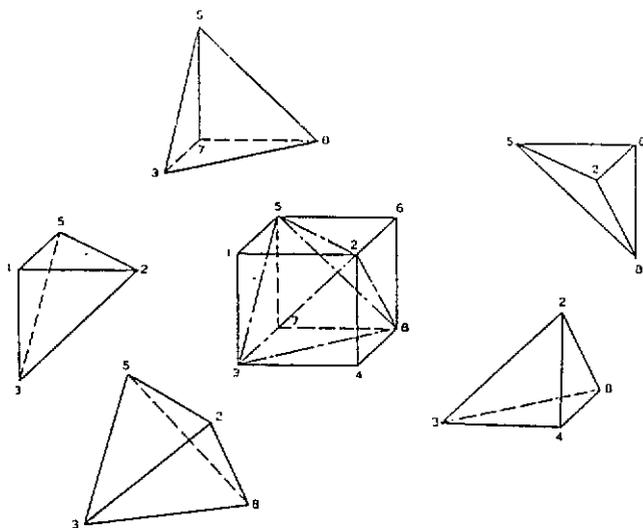


Fig.1 - Decomposizione in tetraedri degli esaedri base.

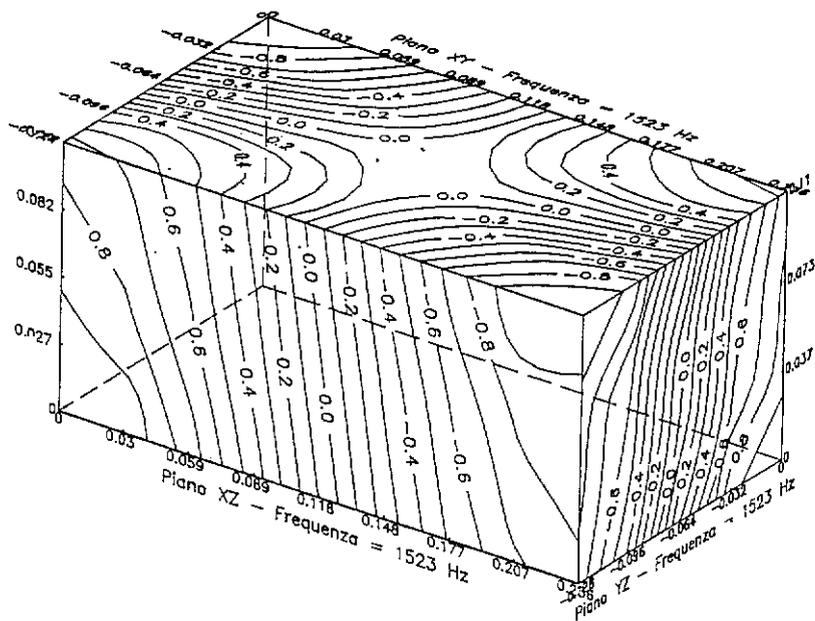


Fig.2 - Modo proprio (1,1,0) della cavita' in esame.