

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA
FACOLTA' DI INGEGNERIA
Istituto di Fisica Tecnica

**Previsione mediante modelli in scala dei campi
acustici generati all'interno di strutture
chiuse vibranti**

Tesi di Laurea di:
ANGELO FARINA

Relatore: Chiar.mo
Prof. ROBERTO POMPOLI
Correlatore:
Ing. GIORGIO PAGLIARINI

ANNO ACCADEMICO 1981-1982

I N D I C E

<u>Lista dei simboli</u>	Pag. 2
- Maiuscole	" 2
- Minuscole	" 3
- Pedici = relativo a	" 4
- Lettere greche minuscole	" 5
- Lettere greche maiuscole	" 6
<u>Introduzione</u>	" 7
1. Scopo della tesi	" 7
2. Cenni storici	" 9
3. Il problema acustico all'interno dell'abitacolo dei veicoli	" 13.
4. Il lavoro sperimentale	" 17
<u>CAPITOLO I</u>	
<u>FORMULAZIONE TEORICA DEL PROBLEMA DELLE VIBRAZIONI</u>	
<u>STRUTTURALI E ACUSTICHE</u>	" 19
1. IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA	" 20
2. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA DELLA RISPOSTA STRUT- TURALE	" 23
3. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA DEL CAMPO ACUSTICO ...	" 30
4. L'EQUAZIONE INTEGRALE DELL'INTERAZIONE TRA FLUI- DO E STRUTTURA	" 35
5. LA FUNZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA	" 38
6. SOLUZIONE ANALITICA DELL'EQUAZIONE INTEGRALE DI INTERAZIONE FRA FLUIDO E STRUTTURA	" 39
7. SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE INTEGRALE CON METODI A- GLI ELEMENTI FINITI	" 48
1. Parametri in uscita	" 50
2. Metodo agli elementi finiti per calcolare le frequenze proprie di una cavità con pareti deformabili	" 59
3. Soluzione del problema generale	" 61
4. Precisione del metodo	" 64

CAPITOLO II

<u>CONDIZIONI PER IL PROGETTO E LA PROVA DEI MODELLI</u>	Pag.	66
1. ANALISI DIMENSIONALE	"	69
2. LA TEORIA DEI MODELLI	"	72
3. ANALISI DEI MODELLI BASATA SULLE EQUAZIONI DEL MOTO DEL SISTEMA	"	75
1. Assunzioni	"	78
2. Equazione acustica	"	79
3. Vibrazioni longitudinali di una trave elasti- ca	"	82
4. Vibrazioni flessionali in una trave snella ..	"	87
5. Vibrazioni longitudinali in una lastra piana.	"	92
6. Vibrazioni flessionali di una lastra piana ..	"	94
7. Vibrazioni nelle lastre curve	"	100
8. Condizioni "esatte" per le vibrazioni nelle lastre curve	"	102
9. Condizioni approssimate per le lastre curve - Caso degli sforzi flessionali trascurabili ..	"	111
10. Condizioni approssimate per le lastre curve - Caso degli sforzi membranali trascurabili ...	"	114
11. Il problema delle condizioni al contorno	"	117
12. Accoppiamento acustico-meccanico	"	118
4. UTILIZZAZIONE DELLE CONDIZIONI PER IL PROGETTO E LA PROVA DEI MODELLI	"	128
1. Modelli con gli stessi materiali e stesso mez- zo acustico del prototipo	"	131
2. Modelli con materiali diversi ma con lo stes- so mezzo acustico del prototipo	"	136
3. Modelli con gli stessi materiali ma diverso mezzo acustico del prototipo	"	139
4. Modelli in materiali diversi e con mezzo acu- stico diverso dal prototipo	"	143
5. Il problema delle azioni forzanti e delle for- ze in generale	"	145
6. Conclusioni	"	148

CAPITOLO III

<u>LAVORO SPERIMENTALE</u>	Pag. 150
1. DESCRIZIONE DEL PROTOTIPO	" 150
2. SCELTA DEL TIPO DI MODELLO	" 164
3. SCELTA DEL TIPO DI MISURE DA ESEGUIRE SU PROTO- TIPO E MODELLO	" 169
4. VERIFICA DEL TIPO DI MATERIALE USATO E SCELTA DEGLI SPESSORI	" 172
1. Montanti	" 173
2. Scelta dei profilati in alluminio per i mon- tanti	" 177
1 - <i>Calcolo delle caratteristiche inerziali delle sezioni del prototipo</i>	" 180
2 - <i>Calcolo delle caratteristiche inerziali richieste per il modello</i>	" 188
3 - <i>Calcolo delle caratteristiche inerziali dei profilati disponibili in commercio e scelta degli stessi</i>	" 191
4 - <i>Rapporti di scala per le forze</i>	" 196
3. Piastre metalliche	" 201
4. Lastre di vetro	" 207
5. Conclusioni	" 213
5. COSTRUZIONE DEL MODELLO	" 215
1. Modello-forma in cartone	" 217
2. Taglio e assemblaggio del Perspex	" 218
3. Taglio e assemblaggio dell'alluminio	" 223
6. MISURE DI RAFFRONTO FRA IL PROTOTIPO ED IL MO- DELLO	" 224
1. La strumentazione	" 227
2. Le acquisizioni	" 235
3. Elaborazione dei dati	" 249
4. Analisi modale	" 258
5. Confronto dei risultati	" 262
7. ULTERIORI MISURE SUL MODELLO	" 273
1. Influenza di una modifica strutturale	" 274
2. Influenza della presenza del guidatore	" 279
3. Funzione di risposta in frequenza	" 288
4. Funzione di trasferimento	" 296
5. Frequenze proprie della cavità a pareti ri- gide	" 301
6. Osservazione degli spettri prodotti dalla per- cussione di varie parti	" 304

8. RICERCA DELLE FREQUENZE PROPRIE DELLA CAVITA' CON IL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI	Pag. 306
9. DISCUSSIONE DEI RISULTATI	" 328
1. Risultati ottenuti dal modello	" 329
2. Risultati ottenuti dal prototipo	" 348
3. Comparazione delle conclusioni ottenute	" 362
<u>Bibliografia</u>	" 366

INDICE DELLE FOTO

Foto 1	Pag. 151
Foto 2	" 154
Foto 3	" 156
Foto 4	" 157
Foto 5	" 160
Foto 6	" 162
Foto 7	" 168
Foto 8	" 216
Foto 9	" 220
Foto 10	" 221
Foto 11	" 222
Foto 12	" 229
Foto 13	" 231
Foto 14	" 232
Foto 15	" 237
Foto 16	" 246
Foto 17	" 247
Foto 18	" 248

INDICE DELLE FIGURE

Figura 1	Pag.	21
Figura 2	"	102
Figura 3	"	129
Figura 4	"	153
Figura 5	"	167
Figura 6	"	179
Figura 7	"	181
Figura 8	"	182
Figura 9	"	183
Figura 10	"	184
Figura 11	"	185
Figura 12	"	187
Figura 13	"	189
Figura 14	"	190
Figura 15	"	194
Figura 16	"	195
Figura 17	"	198
Figura 18	"	200
Figura 19	"	214
Figura 20	"	228
Figura 21	"	238
Figura 22	"	239
Figura 23	"	252
Figura 24	"	253
Figura 25	"	254
Figura 26	"	255
Figura 27	"	256
Figura 28	"	259
Figura 29	"	261
Figura 30	"	263
Figura 31	"	264
Figura 32	"	265
Figura 33	"	267
Figura 34	"	276
Figura 35	"	277

Figura 36	Pag.	281
Figura 37	"	282
Figura 38	"	285
Figura 39	"	286
Figura 40	"	289
Figura 41	"	292
Figura 42	"	293
Figura 43	"	294
Figura 44	"	297
Figura 45	"	299
Figura 46	"	300
Figura 47	"	303
Figura 48	"	309
Figura 49	"	310
Figura 50	"	312
Figura 51	"	314
Figura 52	"	315
Figura 53	"	316
Figura 54	"	317
Figura 55	"	318
Figura 56	"	320
Figura 57	"	322
Figura 58	"	325
Figura 59	"	326
Figura 60	"	332
Figura 61	"	336
Figura 62	"	338
Figura 63	"	342
Figura 64	"	344
Figura 65	"	345
Figura 66	"	349
Figura 67	"	351
Figura 68	"	355
Figura 69	"	356
Figura 70	"	358
Figura 71	"	360

LISTA DEI SIMBOLI

M A I U S C O L E		
SIMBOLO	GRANDEZZA	Unità di misura
A	Area della sezione trasversale	m^2
B	$= K^2 - (\frac{\pi}{R_n})^2$, n° d'onda radiale n-esima	m^{-1}
C	costante dimensionale generica	-
D	$= \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$ Modulo di rigidità flession.	$N \cdot m$
E	Modulo di elasticità	N/m^2
F	Forza	N
G	Funzione di Green	$\frac{N \cdot sec}{m^2 \cdot m^3}$
H	Funzione di risposta in frequenza	$\frac{N}{m^2 \cdot N}$
I	Momento di Inerzia	m^4
J_n, I_n	Funzioni di Bessel di ordine n	-
K	$= \frac{Eh}{(1-\nu)^2}$ Modulo di rigidità Membranale	$\frac{N}{m}$
L	Lunghezza caratteristica del sistema	m
M	Momento flettente	$N \cdot m$
N	Azione interna normale specifica	$\frac{N}{m}$
O	Punto in cui si trova la sorg. sonora	-
P	"Portata acustica" di una sorg. sonora	m^3/sec
Q	Azione interna tagliante specifica	N/m
R	Raggio	m
$\bar{R}$	Vettore posizione di un punto	m
S	Superficie	m^2
T	Taglio	N
U	N° delle Unità fondamentali del Sistema	-
V	Sforzo normale	N

M I N U S C O L E		
SIMBOLO	GRANDEZZA	Unità di misura
a	Lunghezza di una lastra piana	m
b	Larghezza di una lastra piana	m
c	Velocità di propagazione di un'onda	m/sec
$\bar{d}$	Vettore spostamento	m
e	Numero di Neper = 2,71	-
f	Frequenza	Hz
g	Accelerazione di gravità	m/sec ²
h	Spessore di una lastra	m
i	$= \sqrt{-1}$, unità immaginaria	-
k	$= \frac{\omega}{c}$ numero d'onda	m ⁻¹
l	Lunghezza della cavità cilindrica di prova	m
m	n° minimo dei numeri puri	-
n	N° delle variabili di un problema	-
p	Pressione acustica	N/m ²
q	Carico esterno specifico, per u di superf.	N/m ²
q'	Carico esterno specifico, per u di lungh.	N/m ²
r	$= \sqrt{\frac{I}{A}}$ raggio di inerzia	m
s	Ascissa curvilinea	m
t	Tempo	sec
u v w	Componenti del vettore spostamento di un punto	m
x y z		
	Coordinate cartesiane ordinarie	m

P E D I C I = r e l a t i v o a	
SIMBOLO	GRANDEZZA
a	Alluminio
b	Barre, travi
g	Vetro
G	Baricentro
J	Punto J
K	Punto K
l	Lato
L	Punto L
m	Modello
n	Coordinata del riferimento rettangolare (n, q)
O	Punto O
p	Prototipo
q	Coordinata del riferimento rettangolare (n, q)
s	Acciaio
x	Asse x
y	Asse y
ξ	Asse ξ centrale di inerzia
η	Asse η centrale di inerzia
O	Mezzo acustico
S	Mezzo strutturale

L E T T E R E G R E C H E M I N U S C O L E			
SIMBOLO	NOME	GRANDEZZA	Unità di misura
α	alfa	Angolo	Radiani
α_1, α_2		Coordinate curvilinee	m
β	beta	Angolo	Radiani
γ	gamma	Angolo	Radiani
δ	delta	Variazione	-
ϵ	epsilon	Fattore di perdita	-
ζ	zeta	Coordinata del riferimento locale o centrale d'inerzia	m
η	eta	Coordinata del riferimento locale o centrale d'inerzia	m
θ	teta	Angolo	Radiani
λ	lambda	Lunghezza d'onda	m
ν	ni	Coefficiente di Poisson	-
ξ	csi	Coordinata del riferimento locale o centrale d'inerzia	m
π	pi	= 3,14...	-
ρ	rho	Densità	Kg/m ³
σ	sigma	Tensione normale	N/m ²
τ	tau	Tensione tangenziale	N/m ²
ϕ	fi	Fattore di fase	-
ω	omega	Pulsazione	sec ⁻¹

L E T T E R E G R E C H E M A I U S C O L E			
SIMBOLO	NOME	GRANDEZZA	Unità di misura
Γ	gamma	Mobilità	m/N·sec
E	csi	Funzione di trasferimento	m/N·sec ²
Π	pi greco	Raggruppamento adimensionale	-
∇	nabla	Operatore di Laplace	-
$\Phi_J(x,y,z)$	fi	Funzione generica del punto	-

INTRODUZIONE

1 - SCOPO DELLA TESI

La presente tesi costituisce il risultato di una serie di esperimenti volti a verificare la fattibilità e la convenienza di modelli meccanico-acustici realizzati con materiali acrilici.

Detti modelli costituiscono una delle soluzioni possibili al problema dello studio dei campi acustici prodotti all'interno di strutture chiuse dai movimenti vibratorii delle strutture stesse; tuttavia è fatto accenno anche alle altre possibilità di affrontare lo stesso problema, per via analitica e per via numerica.

In base alle equazioni del moto caratteristiche dei vari elementi strutturali e del campo acustico, sono state ricavate le condizioni da rispettare per una corretta realizzazione di un modello in scala ridotta. Sono inoltre state analiz-

zate le varie possibilità di realizzare modelli nel rispetto delle condizioni ottenute.

Si è poi mostrato come, nel caso di strutture sollecitate prevalentemente in modo meccanico, quali ad esempio gli abitacoli dei veicoli, sia in generale possibile trascurare gli effetti del campo acustico sui movimenti della struttura stessa.

Infine è descritta la progettazione e la costruzione di un modello in scala 1:5 della cabina di sicurezza di un trattore FIAT e sono presentate le misure eseguite sia sul prototipo che sul modello.

Dal confronto delle misure fatte, emerge la possibilità di prevedere facilmente, grazie al modello, le frequenze proprie di risonanza dell'abitacolo nonché la possibilità di valutare in breve tempo l'effetto di modifiche strutturali.

I modelli in scala in materiale plastico si

propongono dunque come un valido aiuto del progettista, per evitare già in fase di elaborazione del progetto tutta una serie di "inconvenienti acustici", i quali solitamente vengono corretti non già sui prototipi dei veicoli, ma spesso dopo che la 1.a o la 2.a serie degli stessi è stata distribuita.

2 - CENNI STORICI

Per meglio comprendere la situazione attuale è opportuno premettere alcuni cenni storici.

All'inizio probabilmente si considerò la similitudine geometrica quale l'unica regola empirica per produrre modelli in scala.

Ben presto ci si rese conto della necessità di mettere in scala anche le forze e già Galileo [7] diede alcune osservazioni in proposito.

In seguito Froude [6] determinò la procedura

per produrre modelli di navi e Reynolds [16] studiò le condizioni di similitudine per il flusso dei fluidi nei tubi.

In tutti i campi della meccanica pura (vibrazioni, moti nel campo gravitazionale) fu usata per decenni unicamente la legge di Newton [12], dopo di che l'avvento della simulazione aerodinamica aprì la strada a criteri di modellazione più elastici. In particolare l'aeronautica ha costituito il campo prediletto di investigazione per quanto riguarda fenomeni di instabilità, di risonanza e vibratori in genere.

In pratica negli ultimi decenni sono state sviluppate 4 categorie di modelli che riguardano casi di strutture immerse in fluidi: modelli acustici di edifici e teatri, modelli di dinamica dei fluidi, modelli per l'"impatto strutturale" e modelli di vibrazione libera [1].

I modelli acustici di edifici, ed in partico-

lare di teatri e cinematografi, sono stati usati soprattutto per valutare il tempo di riverberazione, la presenza di echi, ed in generale sono costruiti supponendo le pareti o rigide o fonoassorbente, ma non vibranti.

Tuttavia in questi modelli si ha la possibilità di studiare anche le frequenze proprie della cavità.

I modelli fluidodinamici sono utilizzati per studiare il campo di pressione acustica che si crea nel contatto fra solidi e fluidi in moto reciproco e sono nati per eliminare il forte rumore prodotto dai ventilatori, dalle pompe e dalle accidentalità e turbolenze lungo i condotti; anche in questo caso le pareti delle ventole o delle giranti non vengono ritenute sede di moti vibratori, tuttavia si incomincia a tenere conto dell'effetto del campo acustico sulle tubazioni, e conseguentemente della propagazione strutturale del

suono.

In generale, dunque, in questi modelli si rispetta anche la condizione di accoppiamento acustico.

I modelli per l'"impatto strutturale" servono a studiare gli effetti di urto su una struttura e pertanto sono fatti in modo da rispettare il regime di movimenti forzati della struttura stessa.

In confronto alle azioni forzanti vengono dunque trascurati gli effetti dei campi acustici: la struttura viene pensata nel vuoto.

Infine, nel caso dello studio delle vibrazioni libere di una struttura, quali le oscillazioni di un ponte o le vibrazioni di un albero eccentrico, diventando in questo caso importanti gli smorzamenti nei vincoli e i fattori di perdita dei materiali, la costruzione dei modelli è più accurata e spesso si tiene conto dell'effetto frenante

del fluido sui movimenti della struttura.

Di recente sono stati sviluppati modelli acustico-strutturali per lo studio dei circuiti di raffreddamento a sodio o a gas dei reattori veloci [17], [15], giacché una parte della potenza delle pompe si ritrova come campo acustico all'interno del refrigerante e questo può eccitare vibrazioni dannose nelle parti del reattore a contatto con esso.

In questo ultimo caso siamo già di fronte ad un modello che contempla entrambi gli aspetti del problema, cioè sia le vibrazioni strutturali che il campo acustico nel fluido e la loro interazione.

3 - IL PROBLEMA ACUSTICO ALL'INTERNO DELL'ABITACOLO DEI VEICOLI

Oramai è entrato nell'uso comune dotare i veicoli di abitacoli in grado di assicurare un

elevato confort agli occupanti.

Tuttavia l'abitacolo stesso viene generalmente concepito in funzione della resistenza strutturale ed in sede di progetto ci si occupa più del confort termico e visivo che di quello acustico. Ad esso si provvede poi, applicando con dovizia materiali fonoassorbenti, insonorizzanti, separando il più possibile l'abitacolo mediante montaggi elastici dalle parti meccaniche, ecc.

Tuttavia, specie in campo aeronautico, si è sentita l'esigenza di affrontare il problema già in fase progettuale e in genere si è scelta la strada di eliminare alla radice le fonti del rumore, effettuando sperimentazioni sui motori, sui profili alari, sui carrelli, ecc.

In questi casi in genere sono stati usati modelli fluidodinamici o impattivi. Tuttavia, almeno finché non si è realizzato un prototipo, non viene effettuata alcuna sperimentazione diretta

del campo acustico prodotto all'interno; in alcuni casi però è stata effettuata la predizione del campo acustico mediante un modello matematico agli elementi finiti [22], simulante sia la struttura che la cavità, in analogia allo studio, oramai divenuto consueto, delle frequenze proprie della cavità dell'abitacolo [15].

Lo scopo di questa tesi è dunque quello di determinare le condizioni di progetto per un modello adatto allo studio del campo acustico all'interno di una struttura con azioni sollecitanti assegnate e di verificare poi l'attendibilità delle previsioni effettuate con un modello di questo tipo.

In pratica questi modelli possono essere chiamati meccanico-acustici e sono concettualmente il reciproco dei modelli acustico-meccanici già visti per lo studio del raffreddamento dei reattori veloci.

Nella trattazione che seguirà verranno illustrate le leggi comuni a questi due tipi di modelli, nonché le condizioni "esatte", soddisfacendo le quali il modello potrà essere usato per entrambi gli scopi.

Tuttavia si mostrerà come in generale sia possibile costruire, con maggiori gradi di libertà, modelli specifici per l'uno o l'altro scopo.

In particolare, nel caso che a noi interessa, sarà possibile considerare le vibrazioni della struttura indipendenti dal campo acustico e trascurare pertanto la condizione di accoppiamento acustico, che invece era determinante nell'altro caso.

Inoltre, siccome in genere interessa conoscere soprattutto le frequenze a cui si verificano le risonanze, più che le esatte ampiezze, è possibile usare materiali con diverso fattore di perdita rispetto all'originale, ottenendo ugualmente le informazioni volute.

4 - IL LAVORO SPERIMENTALE

La verifica delle ipotesi fatte e la conferma della validità delle regole di modellazione ottenute sono state saggiate realizzando un modello in scala 1:5 della cabina di sicurezza di un trattore agricolo FIAT ed effettuando poi sia sul modello che sul prototipo tutte quelle misure che vengono solitamente eseguite sui prototipi dei veicoli per valutare le caratteristiche acustiche dell'abitacolo.

Di questi risultati ci si serve per cercare di non far sovrapporre le risonanze dell'abitacolo con le frequenze a cui gli organi meccanici producono il massimo disturbo e per individuare quelle parti della struttura che vibrando generano il maggior campo acustico all'interno, onde poterle modificare, o almeno rivestire con materiali adeguati.

Dai risultati ottenuti appare chiaramente

che l'uso di modelli in scala di questo tipo può risultare molto utile in sede di progetto, quando ancora la realizzazione di un prototipo appare lontana, per saggiare gli effetti di varie ipotesi strutturali e formali, per valutare approssimativamente e per prevedere gli effetti dell'applicazione di forze sollecitanti in vari punti della struttura.

Si consideri inoltre che lo stesso modello può essere usato anche per studi puramente meccanici, poiché il rispetto delle condizioni strutturali lo rende in grado di simulare il comportamento sia statico che dinamico della struttura. Reciprocamente si può pensare di utilizzare per il nostro scopo modelli creati per altri motivi (aerodinamici, studio delle tensioni) dopo aver controllato che soddisfino alle condizioni di similitudine qui ricavate.

Capitolo I

FORMULAZIONE TEORICA DEL PROBLEMA DELLE VIBRAZIONI STRUTTURALI E ACUSTICHE

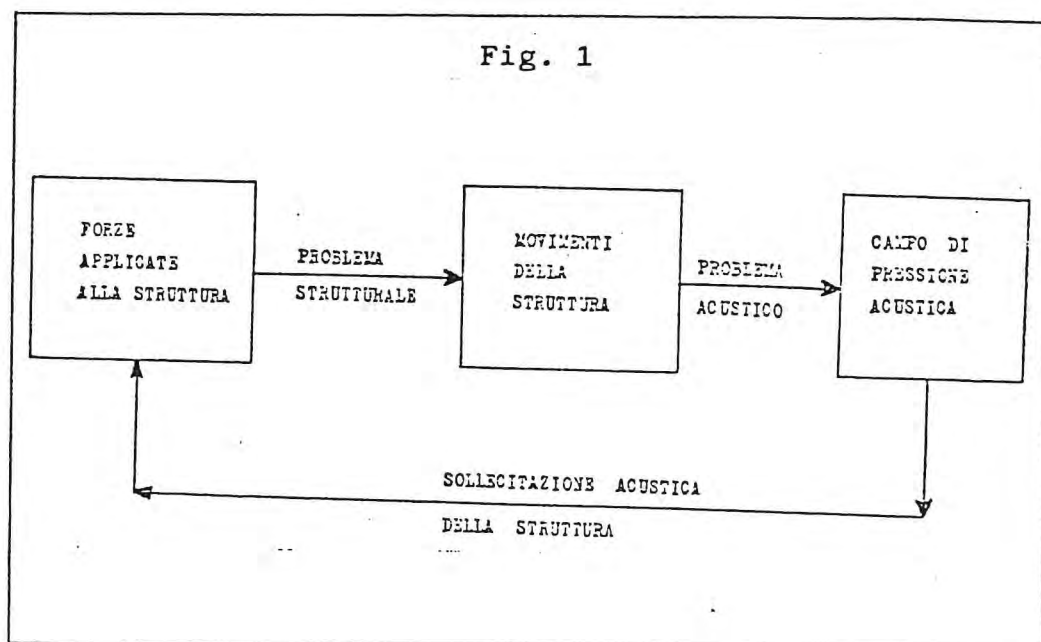
Il primo argomento da affrontare è la formulazione delle equazioni accoppiate che governano la risposta dinamica di una struttura che vibra in un fluido, soggetta ad eccitazioni esterne, sia nella forma di forze applicate che di onde acustiche incidenti sulla struttura [9].

Lo scopo di questa trattazione è quello di mostrare la natura delle soluzioni del problema elastico e di quello acustico, soluzioni che vengono poi combinate per descrivere il problema della interazione.

1-1 - IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA

Il problema delle vibrazioni di una struttura chiusa riempita di un mezzo acustico è un "circolo chiuso": infatti le vibrazioni prodotte nella struttura (supponiamo da parte di una forza esterna) si propagano da questa al mezzo acustico nel quale si genera dunque un campo acustico di pressione, il quale va a sua volta ad eccitare la struttura, anche in parti che non erano interessate all'eccitazione esterna, e dunque ciò produce a rigore differenze nella dinamica della struttura stessa rispetto alla risposta alle stesse sollecitazioni in assenza del mezzo acustico.

La soluzione del problema sarebbe comunque possibile per approssimazioni successive, come mostrato dal seguente schema (Fig. 1).



Fortunatamente, essendo molto bassa la densità dell'aria in confronto di quella dei materiali costituenti le strutture, gli effetti del carico acustico sulla struttura sono piccolissimi, e possono essere trascurati ogni qualvolta la struttura stessa sia soggetta a carichi di altra origine, purché di intensità molto superiore.

Dunque è possibile in questi casi risolvere il problema strutturale come se la struttura fosse nel vuoto, dopodiché i movimenti della struttura

stessa andranno considerati come condizioni al contorno del problema acustico.

In questo modo si riesce ad ottenere il campo acustico generato da una assegnata sollecitazione strutturale.

Reciprocamente, qualora sia assegnata una sorgente acustica nota, si può effettuare il calcolo del campo acustico prodotto nelle ipotesi di pareti rigide, dopo di che il campo di pressione ottenuto andrà applicato come termine forzante del problema strutturale, arrivando così ad individuare i movimenti della struttura prodotti da un campo acustico generato autonomamente.

Questi procedimenti di "apertura del circolo" non possono però essere adottati in tutti i casi: se infatti la cavità è riempita con un fluido molto più denso dell'aria alla pressione atmosferica, oppure se le pareti della struttura sono eccezionalmente leggere e poco rigide, allora non è più

trascurabile l'effetto frenante del fluido sulle oscillazioni libere della struttura, ed occorre affrontare il problema globalmente.

La convergenza del procedimento iterativo è tanto più lenta quanto più marcate sono le condizioni sfavorevoli ora enunciate.

1-2 - FORMULAZIONE DEL PROBLEMA DELLA RISPOSTA STRUTTURALE

Consideriamo una generica struttura spaziale, in riposo e nel vuoto.

Facciamo l'ipotesi di condizioni lineari di risposta ai carichi, per cui vale la sovrapponibilità degli effetti.

Sollecitiamo la struttura in un punto con una forza applicata perpendicolarmente al piano tangente alla superficie in quel punto.

La forza è supposta ad andamento sinusoidale

nel tempo secondo la legge

(1)

$$F(t) = F_0 e^{-i\omega t}$$

Generalizzando possiamo pensare ad un campo di forza applicata sempre perpendicolarmente alle superfici della struttura.

Detto $\bar{R}_L$ il vettore posizione del punto L, la forza applicata in esso sarà:

(2)

$$F(\bar{R}_L, t) = F_0(\bar{R}_L) \cdot e^{-i\omega t}$$

La risposta della struttura alla forza sollecitante è costituita dal movimento nel tempo dei punti della struttura stessa rispetto alle posizioni di riposo.

Nell'ipotesi di risposta lineare della struttura, possiamo affermare che anche lo spostamento

avrà legge sinusoidale nel tempo.

Assumendo un riferimento locale, con versori $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ con l'asse $\bar{\zeta}$ normale alla superficie in ogni punto, ottengo che il vettore $\bar{d}(\bar{R}_K, t)$, esprimente lo spostamento del punto K dalla posizione di riposo, può essere espresso come:

(3)

$$\bar{d}(\bar{R}_K, t) = [u(\bar{R}_K, t)\bar{\xi} + v(\bar{R}_K, t)\bar{\eta} + w(\bar{R}_K, t)\bar{\zeta}]$$

In pratica è un vettore, le cui componenti sono grandezze sinusoidali caratterizzate da ampiezza e fase: per semplicità di trattazione, limitiamoci a considerare la componente w dello spostamento, normale alla superficie della struttura:

(4)

$$w(\bar{R}_K, t) = w_0(\bar{R}_K) e^{-i[\omega t - \phi(\bar{R}_K)]}$$

In molti casi, anziché conoscere lo sposta-

mento nel tempo del punto K, ci interessa piuttosto conoscere la sua velocità $\dot{w}(\bar{R}_K, t)$ oppure la sua accelerazione $\ddot{w}(\bar{R}_K, t)$; per quanto detto prima anche esse saranno grandezze sinusoidali, caratterizzate da ampiezza e fase.

La struttura può dunque essere pensata come un "operatore" lineare che trasforma le forze sollecitanti $F(\bar{R}_L, t)$ in velocità e accelerazioni di ogni punto della struttura ($\dot{w}(\bar{R}_K, t)$, $\ddot{w}(\bar{R}_K, t)$).

Esprimendo il rapporto fra effetto prodotto e forza sollecitante veniamo a definire due nuove grandezze; sono entrambe "funzioni di trasferimento", ma noi le indicheremo per chiarezza con questi nomi:

(5) MOBILITA' $\frac{\dot{w}(\bar{R}_K, t)}{F(\bar{R}_L, t)} = r(\bar{R}_K, \bar{R}_L)$

(6)
FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$\frac{\dot{w}(\bar{R}_K, t)}{F(\bar{R}_L, t)} = \varepsilon(\bar{R}_K, \bar{R}_L)$$

Sia r che ε , essendo rapporti di grandezze complesse, saranno pure grandezze complesse, ma per le ipotesi fatte non dipenderanno dal tempo, vista la legge armonica valida sia per $\dot{w}$, $\ddot{w}$ che per F ; sarà dunque

(7)

$$r = r_0 e^{i\phi}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\phi}$$

r_0 e ε_0 sono chiamati "fattori di ampiezza" ("gain factor") e ϕ è il "fattore di fase" ("phase factor").

Possiamo dunque ritenere che una appropriata descrizione della risposta di una struttura alle sollecitazioni sia la conoscenza per ogni suo pun-

to della mobilità oppure della funzione di trasferimento, in corrispondenza di ognuno dei punti di sollecitazione della struttura stessa.

Notiamo che il valore della mobilità e della funzione di trasferimento non dipendono dall'intensità della forza, nelle ipotesi di comportamento lineare.

Per la sovrapponibilità degli effetti, è dunque possibile sommare in un punto le componenti di movimento dovute a sollecitazioni in più punti della struttura: ad esempio, con la mobilità, ho:

$$(8)$$

$$\dot{w}(\bar{R}_K, t) = r(\bar{R}_K, \bar{R}_1) \cdot F(\bar{R}_1, t) + r(\bar{R}_K, \bar{R}_2) \cdot F(\bar{R}_2, t) + \dots + r(\bar{R}_K, \bar{R}_n) \cdot F(\bar{R}_n, t)$$

Essendo tutti i termini complessi, la somma va eseguita con le regole dei numeri complessi, come d'altronde i prodotti tra F e r .

E' appena il caso di notare che tutta la trattazione fin qui eseguita vale per un fissato ω della forza sollecitante, e che dunque il valore ricavato per r e ε è in generale variabile con la pulsazione ω .

Nella somma espressa dalla (8) i vari termini possono essere costituiti da forze sinusoidali di differente pulsazione, ma ognuno è moltiplicato per la mobilità propria di quella pulsazione.

Se infine al posto di forze concentrate ammettiamo la presenza di pressioni distribuite, cioè l'esistenza di un campo di pressione $p(\bar{R}_J, t)$, ad andamento sinusoidale nel tempo, la sommatoria dell'equazione (8) diviene un integrale esteso alla superficie caricata della struttura:

(9)

$$\dot{w}(\bar{R}_K, t) = - \int_S p(\bar{R}_J, t) \cdot r(\bar{R}_K, \bar{R}_J) dS(\bar{R}_J)$$

Il segno meno è dovuto all'assunzione della

pressione positiva se comprime la struttura, al contrario delle forze che erano positive se di trazione.

Le equazioni (8) e (9), o le analoghe con la funzione di trasferimento al posto della mobilità, sono dunque la soluzione del problema strutturale per quanto riguarda la componente w del movimento, in presenza di soli carichi perpendicolari alla struttura ed in regime lineare.

Notiamo infine che se un punto è fisso la sua mobilità è identicamente nulla.

1-3 - FORMULAZIONE DEL PROBLEMA DEL CAMPO ACUSTICO

La soluzione del problema del campo acustico consiste nel trovare la pressione sonora p in un punto del campo individuato dal vettore $\bar{R}_J$, prodotta da una sorgente acustica posta nel punto $\bar{R}_0$.

Supponiamo ovviamente che la sorgente sonora generi un segnale armonico, di portata acustica P , definita come il prodotto della velocità della superficie emittente per la sua estensione dS :

(10)

$$P(\bar{R}_0, t) = \dot{w}_0(\bar{R}_0) e^{-i\omega t} \cdot dS(\bar{R}_0)$$

La particolare geometria della regione dello spazio in cui studiamo il campo acustico sarà tale da produrre nel punto R_J una pressione $p(\bar{R}_J, t)$, del tipo $p(\bar{R}_J, t) = \bar{p}_0(\bar{R}_J) \cdot e^{-i(\omega t - \phi(\bar{R}_J))}$, sicuramente anch'essa sinusoidale, e proporzionale all'intensità della sorgente; come prima, il rapporto fra la pressione prodotta e la portata acustica della sorgente eccitante è una grandezza caratteristica del nostro sistema:

(11)

FUNZIONE DI GREEN

$$\frac{p(\bar{R}_J, t)}{P(\bar{R}_0, t)} = G(\bar{R}_J, \bar{R}_0)$$

Chiaramente G è una grandezza complessa del tipo:

(12)

$$G = G_0 \cdot e^{i\phi}$$

e non dipende dal tempo. Dipende invece dalla pulsazione ω della sorgente eccitante, e si può dunque scrivere $G = G(\bar{R}_J, \bar{R}_0, \omega)$.

Se in ogni punto del campo acustico noi conosciamo il fattore di ampiezza ed il fattore di fase della funzione G , noi possiamo ricavare il valore della pressione sonora prodotta dalla sorgente $dS(\bar{R}_0)$:

(13)

$$p(\bar{R}_J, t) = G(\bar{R}_J, \bar{R}_0) \cdot \dot{w}_0(\bar{R}_0) \cdot e^{-i\omega t} \cdot dS(\bar{R}_0)$$

Se infine ammettiamo che esista un'intera superficie emettente, è sufficiente, per la sovrapposibilità degli effetti, sommare i contributi delle singole porzioni emettenti dS ; siccome però le varie parti della superficie emittente possono non essere in fase, descriveremo la portata acustica della generica porzione emittente $dS(\bar{R}_H)$ come

$$(14)$$

$$P(\bar{R}_H, t) = \dot{w}(\bar{R}_H, t) \cdot dS(\bar{R}_H)$$

nella quale è

$$(15)$$

$$\dot{w}(\bar{R}_H, t) = w_0(\bar{R}_H) \cdot e^{-i(\omega t - \phi(\bar{R}_H))}$$

ove $\phi(\bar{R}_H)$ è lo sfasamento dell'elemento $dS(\bar{R}_H)$ rispetto all'elemento $dS(\bar{R}_0)$.

Con questa notazione si ha dunque:

(16)

$$p(\bar{R}_J, t) = \int_S \dot{w}(\bar{R}_H, t) \cdot G(\bar{R}_J, \bar{R}_H) \cdot dS(\bar{R}_H)$$

la $p(\bar{R}_J, t)$ che esce da questa relazione sarà del tipo:

$$p(\bar{R}_J, t) = p_0(\bar{R}_J) \cdot e^{-i(\omega t - \phi(\bar{R}_J))}$$

ed in essa la fase $\phi(\bar{R}_J)$ sarà valutata, per le ipotesi fatte, rispetto alla fase della sorgente nel punto individuato dal vettore $\bar{R}_0$.

La conoscenza dunque della funzione di Green per tutti i valori delle sue variabili, consente di risolvere completamente il problema del campo acustico, determinando il valore della pressione sonora e la sua fase in ogni punto del campo stesso.

1-4 - L'EQUAZIONE INTEGRALE DELL'INTERAZIONE TRA FLUIDO E STRUTTURA

Consideriamo una struttura immersa in un fluido e soggetta ad un campo di forze $F(\bar{R}_L, t)$; essa sia contemporaneamente soggetta ad un campo di pressioni acustiche $p(\bar{R}_J, t)$.

Allora dalle equazioni (8) e (9) abbiamo:

(17)

$$\dot{w}(\bar{R}_K, t) = - \int_S p(\bar{R}_J, t) \cdot r(\bar{R}_K, \bar{R}_J) dS(\bar{R}_J) + \sum_L F(\bar{R}_L, t) \cdot r(\bar{R}_K, \bar{R}_L)$$

Se però supponiamo che la pressione acustica sia quella prodotta dal movimento stesso delle pareti della struttura, la possiamo esprimere con la (16), per cui, sostituendo nella (17), otteniamo:

(18)

$$\dot{w}(\bar{R}_K, t) = - \int_{S(\bar{R}_J)} \left[\int_{S(\bar{R}_H)} \dot{w}(\bar{R}_H, t) \cdot G(\bar{R}_J, \bar{R}_H) \cdot dS(\bar{R}_H) \right] \cdot r(\bar{R}_K, \bar{R}_J) dS(\bar{R}_J) + \sum_L F(\bar{R}_L, t) \cdot r(\bar{R}_K, \bar{R}_L)$$

Come si vede l'equazione (18) è un'equazione integrale, che in teoria sarebbe risolubile direttamente, mentre in pratica può venire risolta iterativamente, assumendo un primo valore di tentativo per $\dot{w}(\bar{R}_H, t)$ e approssimando via via il risultato.

Questa equazione risolve il problema di una struttura immersa in un fluido con assegnate forze esterne sollecitanti; il problema duale, di struttura con assegnata sorgente di suoni nel punto $\bar{R}_S$, può essere risolto facilmente notando che in questo caso si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 & (19) \\
 & p(\bar{R}_J, t) = P(\bar{R}_S, t) \cdot G(\bar{R}_J, \bar{R}_S) + \\
 & \quad + \int_S \dot{w}(\bar{R}_H, t) \cdot G(\bar{R}_J, \bar{R}_H) \cdot dS(\bar{R}_H)
 \end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (9) ottengo:

(20)

$$\dot{w}(\bar{R}_K, t) = -\int_{S(\bar{R}_J)} [P(\bar{R}_S, t) \cdot G(\bar{R}_J, \bar{R}_S) + \\ + \int_{S(\bar{R}_H)} \dot{w}(\bar{R}_H, t) \cdot G(\bar{R}_J, \bar{R}_H) \cdot dS(\bar{R}_H)] \cdot r(\bar{R}_K, \bar{R}_J) \cdot dS(\bar{R}_J)$$

che è nuovamente un'equazione integrale, risolubile come visto per la (18).

E' chiaramente possibile generalizzare ulteriormente il risultato, supponendo la presenza di numerose sorgenti sonore $S_1, S_2 \dots S_n$, e la contemporanea presenza delle forze esterne $F(\bar{R}_J, t)$; in questo caso si ottiene:

(21)

$$\dot{w}(\bar{R}_K, t) = -\int_{S(\bar{R}_J)} [\sum_S (P(\bar{R}_S, t) \cdot G(\bar{R}_J, \bar{R}_S)) + \\ + \int_{S(\bar{R}_H)} \dot{w}(\bar{R}_H, t) \cdot G(\bar{R}_J, \bar{R}_H) \cdot dS(\bar{R}_H)] \cdot \\ \cdot r(\bar{R}_K, \bar{R}_J) dS(\bar{R}_J) + \sum_L F(\bar{R}_L, t) \cdot r(\bar{R}_K, \bar{R}_L)$$

essa è dunque l'equazione generale dell'accoppiamento fra vibrazioni forzate strutturali ed acustiche.

1-5 - LA FUNZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA

AmMESSO di avere risolto il problema espresso dall'equazione (18), cioè di sollecitazione meccanica di una struttura immersa in un fluido, servendoci dell'equazione (16), nella quale ora $\dot{w}(\bar{R}_H, t)$ è noto, possiamo arrivare a conoscere in ogni punto $\bar{R}_J$ il valore $p(\bar{R}_J, t)$ della pressione sonora.

Se ammettiamo che la sollecitazione sulla struttura sia costituita da una sola forza, agente nel punto $\bar{R}_L$, appare evidente, per le ipotesi di linearità mai abbandonate, che il valore $p(\bar{R}_J, t)$ sarà proporzionale ad $F(\bar{R}_L, t)$ tramite una nuova grandezza complessa, denominata "funzione di risposta in frequenza" ("frequency response function") e designata con $H(\bar{R}_J, \bar{R}_L)$, tale che:

(22)

$$\frac{p(\bar{R}_J, t)}{F(\bar{R}_L, t)} = H(\bar{R}_J, \bar{R}_L)$$

Ovviamente, come r , ε e G , anche H sarà una grandezza complessa, caratterizzata da ampiezza e fase, indipendentemente dal tempo e funzione della pulsazione ω della forza sollecitante.

1-6 - SOLUZIONE ANALITICA DELL'EQUAZIONE INTEGRALE DI INTERAZIONE FRA FLUIDO E STRUTTURA

In questo paragrafo verrà presentata una soluzione del problema del campo acustico dentro una cavità, ottenuta per via puramente analitica, cioè partendo dall'equazione integrale vista precedentemente [13]. Anche in questo caso, però, occorrerà fare l'ipotesi che le vibrazioni strutturali non siano influenzate dalla presenza del mezzo acustico.

La cavità è di forma cilindrica, di raggio R e lunga l , con tutte le pareti perfettamente rigide, tranne una base costituita da una lastra circolare flessibile ed elastica, incastrata al con-

torno e sollecitata nel centro da una forza sinusoidale a pulsazione costante ω , diretta lungo l'asse del cilindro.

Prendiamo un riferimento cilindrico ξ, θ, z , con origine nel centro della piastra vibrante e l'asse z orientato lungo l'asse del cilindro.

Il campo acustico prodotto all'interno, viste le condizioni di simmetria, dipenderà solo dalla coordinata radiale ξ e da z , ma non dall'angolo θ .

Ecco che il vettore $\bar{R}_J$ potrà essere definito dalle sole due coordinate suddette. Analogamente gli spostamenti w della lastra vibrante saranno funzione solo della coordinata radiale ξ' .

Dall'equazione (16), considerando anche la simmetria del disco vibrante ho:

$$(23)$$

$$p(\bar{R}_J, t) = \int_{\xi'=0}^R G(\bar{R}_J, \xi') \cdot e^{-i(\omega t - \phi(\xi'))} dP_0(\xi')$$

nella quale si è supposto:

(24)

$$P(\bar{R}_H, t) = P_0(\bar{R}_H) \cdot e^{-i(\omega t - \phi(\bar{R}_H))}$$

Essendo il caso geometricamente semplice, è possibile effettuare lo sviluppo in serie della funzione di Green $G(\bar{R}_j, \xi')$: detto sviluppo conduce però a due espressioni diverse, a seconda che il parametro B sia maggiore o minore di zero:

(25)

$$B = K^2 - \left(\frac{\pi}{R} \cdot \alpha_n\right)^2 \lesseqgtr 0$$

In essa compare il numero d'onda $K = \frac{\omega}{c_0}$ e i termini α_n che valgono: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 1,22$; $\alpha_3 = 2,33$; ecc.

Il termine $K_{\xi n} = \frac{\pi}{R} \cdot \alpha_n$ è il numero d'onda radiale n -esimo.

Con queste notazioni abbiamo dunque le se-

guenti due espressioni per $G(\bar{R}_J, \xi')$:

(26)

$$G(\bar{R}_J, \xi') = \frac{-\rho_o^{i\omega}}{\pi R^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_o\left(\frac{\pi}{R} \cdot \alpha_n \cdot \xi\right) \cdot J_o\left(\frac{\pi}{R} \cdot \alpha_n \cdot \xi'\right)}{J_o^2(\pi \cdot \alpha_n)} \cdot \frac{e^{\Delta_{\xi n} \cdot z} + e^{\Delta_{\xi n} \cdot (2.1 - z)}}{\Delta_{\xi n} \cdot (1 - e^{\Delta_{\xi n} \cdot 2.1})}$$

per $B \leq 0$

(27)

$$G(\bar{R}_J, \xi') = \frac{-\rho_o^{i\omega}}{\pi R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_o\left(\frac{\pi}{R} \alpha_n \cdot \xi\right) \cdot J_o\left(\frac{\pi}{R} \alpha_n \cdot \xi'\right)}{J_o^2(\pi \cdot \alpha_n)} \cdot \frac{\cos[\Delta_{\xi n} \cdot (z-1)]}{\Delta_{\xi n} \operatorname{sen}(\Delta_{\xi n} \cdot 1)}$$

per $B > 0$

nelle quali è:

ω = pulsazione della sorgente sonora;

ρ_o = densità del mezzo acustico;

$\Delta_{\xi n} = |\sqrt{B}|$

compare inoltre la funzione di Bessel J_0 ; ricordiamo che la funzione di Bessel di ordine n è definita da:

$$(28)$$

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n!} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2}}{1!(n+1)!} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+4}}{2!(n+2)!} - \dots$$

Anticipiamo inoltre anche la definizione della funzione iperbolica di Bessel di ordine m (chiamata I_m)

$$(29)$$

$$I_m(z) = i^{-m} \cdot J_m(i \cdot z)$$

E' dunque chiaro che, grazie alle equazioni (26) e (27) è possibile calcolare il valore della funzione di Green per tutti i punti della cavità cilindrica e rispetto a tutti i punti della piastra vibrante.

A questo punto occorre conoscere la distribuzione della portata acustica $P_o(\xi')$, che può essere legata alla velocità dei punti dalla:

(30)

$$dP_o(\xi') = \dot{w}_o(\xi') \cdot 2\pi\xi' d\xi'$$

Nell'ipotesi che il disco sia soggetto alla sola forza esterna $F(t) = F_o \cdot e^{-i\omega t}$, e non al campo acustico, è possibile ricavare mediante sviluppo in serie di funzioni, dall'equazione differenziale delle lastre vibranti, la seguente espressione per lo spostamento $w_{om}(\xi')$ di ciascun punto, secondo il modo m-esimo [21]:

(31)

$$w_{om}(\xi') = J_o\left(\frac{\pi}{R} \cdot \beta_m \cdot \xi'\right) - \frac{J_o(\pi\beta_m)}{I_o(\pi\beta_m)} \cdot I_o\left(\frac{\pi}{R} \beta_m \cdot \xi'\right)$$

nella quale β_m assume questi valori: $\beta_1 = 1.015$; $\beta_2 = 2.007$; $\beta_3 = 3.000$; $\beta_4 = 4.000$; ecc. (questi

valori di β , come prima quelli di α , dipendono dalle condizioni al contorno).

Sommando secondo m i contributi degli infiniti modi, e derivando si ha:

$$(32)$$

$$\dot{w}_0(\xi') = i\omega \cdot \sum_{m=1}^{\infty} C_{0m} \cdot w_{\rho_m}(\xi')$$

nella quale compare il fattore C_{0m} definito dalla:

$$(33)$$

$$C_{0m} = \frac{1}{(\omega_m^2 - \omega^2) \cdot \pi R^2 \cdot J_0^2(\pi \beta_m)} \cdot \frac{F_0}{\rho_s h} \cdot w_{0m}(0)$$

In quest'ultima espressione compaiono:

$$(34)$$

$$\omega_m = c_s \cdot \frac{\pi}{R} \cdot \beta_m$$

inoltre:

- F_o è l'intensità massima della forza sollecitante;
- ρ_s è la densità del materiale della lastra;
- h è lo spessore della lastra stessa;
- $w_{om}(o)$ è il valore ottenuto dalla (31) ponendo $\xi' = 0$.

Sostituendo infine tutte le espressioni viste dentro alla (23), otteniamo con un unico passaggio:

$$\begin{aligned}
 & (35) \\
 & p_o(R_J) = \omega^2 \frac{F_o \rho_o}{h \rho_s} \cdot \frac{1}{2\pi^2 R^4} \cdot \sum_{n,m} \left[\frac{1 - J_o(\pi \beta_m) / I_o(\pi \beta_m)}{(\omega_m^2 - \omega^2) \cdot J_o^2(\pi \beta_m)} \cdot \right. \\
 & \cdot \frac{J_o(\frac{\pi}{R} \cdot \alpha_n \cdot \xi)}{\Delta_{\xi n} \cdot J_o^2(\pi \alpha_n)} \cdot Z(z) \cdot \int_{\xi'=0}^R J_o(\frac{\pi}{R} \cdot \alpha_n \cdot \xi') \cdot w_{om}(\xi') \cdot \\
 & \left. \cdot 2\pi \xi' d\xi' \right]
 \end{aligned}$$

In essa al fattore $Z(z)$ vanno sostituite queste espressioni:

(36)

$$\frac{e^{\Delta_{\xi n} \cdot z} + e^{\Delta_{\xi n} (z-1)}}{1 - e^{\Delta_{\xi n} \cdot 2.1}} \quad \text{se } B \leq 0$$

(37)

$$\frac{\cos(\Delta_{\xi n} \cdot (z-1))}{\sin(\Delta_{\xi n} \cdot 1)} \quad \text{se } B > 0$$

Si può inoltre dimostrare che l'integrale che compare nella (35) vale:

(38)

$$\begin{aligned} \int_{\xi'=0}^R J_0\left(\frac{\pi}{R} \cdot \alpha_n \cdot \xi'\right) \cdot w_{0m}(\xi') \cdot 2\pi \xi' d\xi' &= 2R^2 \left\{ \frac{1}{\beta_m^2 - \alpha_n^2} [\beta_m \cdot \right. \\ &\cdot J_0(\pi \alpha_n) \cdot J_1(\pi \beta_m) - \alpha_n J_0(\pi \beta_m) \cdot J_1(\pi \alpha_n)] - \frac{1}{\beta_m^2 + \alpha_n^2} \cdot \\ &\cdot \left. \frac{J_0(\pi \beta_m)}{I_0 \pi \beta_m} \cdot [\beta_m \cdot J_0(\pi \alpha_n) \cdot I_1(\pi \beta_m) + \alpha_n \cdot I_0(\pi \beta_m) \cdot J_1(\pi \alpha_n)] \right\} \end{aligned}$$

Ovviamente per valutare tutte queste funzioni di Bassel occorre un programma di calcolo, ma con esso è molto facile ottenere un valore numerico per il campo di pressione acustica in ogni punto della cavità.

I risultati ottenuti dalla (35) sono in ottimo accordo con le esperienze effettuate, e questo a tutte le frequenze, escluse quelle proprie di risonanza della cavità e della piastra, poiché in questo caso gli smorzamenti nei vincoli e i fattori di perdita nei materiali riducono l'ampiezza reale delle oscillazioni rispetto al valore teorico.

1-7 - SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE INTEGRALE CON METODI AGLI ELEMENTI FINITI

Vedremo in questo paragrafo come è possibile impostare lo studio del problema acustico in una cavità con pareti rigide oppure deformabili.

Solitamente il procedimento viene usato per trovare le frequenze proprie di una cavità a pareti rigide (ed in certi casi, come vedremo, deformabili). Tuttavia, è possibile, per sollecitazioni a frequenze diverse da queste, calcolare le pressioni acustiche prodotte da movimenti della struttura già noti. Possiamo pensare, per fissare le idee, di aver ottenuto le velocità delle parti strutturali o da misure dirette con accelerometri, oppure da un programma di calcolo strutturale, ad esempio anch'esso agli elementi finiti; in entrambi i casi, comunque, le velocità dei punti sono parametri d'ingresso per il problema, e partendo da essi si riesce a determinare, in modo piuttosto semplice, il campo acustico prodotto.

Più complesso è il caso generale in cui il campo acustico modifica significativamente il regime vibrazionale della struttura. In questa ipotesi è ancora possibile determinare le frequenze proprie della cavità, e persino ottenere le pressioni acustiche prodotte dalle forze esterne F .

]-7-1 - Parametri in uscita.

Occorre, a questo punto, introdurre l'equazione d'onda di Helmholtz, che descrive il campo di pressione acustica nel caso che essa sia esprimibile in forma armonica:

(39)

$$\nabla^2 p_o + \left(\frac{\omega}{c_o}\right)^2 \cdot p_o = 0$$

ad essa sono associate le condizioni al contorno

(40)

PARETE MOBILE ($w \neq 0$)

PARETE FISSA ($w = 0$)

$$\frac{\partial p_o}{\partial n} = -\rho_o \omega^2 w$$

(41)

PARETE INESISTENTE, BUCO

$$p_o = 0$$

Supponiamo ora di dividere la nostra cavità in un certo numero di elementi geometrici, di for-

ma e dimensione qualsiasi; gli elementi confineranno fra loro lungo delle facce, le quali si incontreranno in spigoli e gli spigoli si incontreranno in nodi: in generale il numero degli elementi è diverso da quello dei nodi.

Con questa discretizzazione, scriviamo l'equazione (39) per ogni elemento ed esprimiamo questo sistema di equazioni con la notazione matriciale:

(42)

$$[B]\{\ddot{p}\} + [C] \cdot \{p\} = -(\rho_0 c_0) [A]^T \{\ddot{w}\}$$

nella quale le matrici $[B]$ e $[C]$ raggruppano i termini massivi e le costanti elastiche dell'equazione di Helmholtz, mentre la matrice $[A]^T$ è la matrice trasposta delle aree degli elementi di contorno confinanti con la struttura circostante.

Nel caso dell'interazione strutturale-acustica le pareti elastiche sono anch'esse soggette

ad un regime vibrazionale, che può essere descritto da un'equazione del tipo (supponendo discretizzata anche la struttura):

(43)

$$[M].\{\ddot{w}\} + [D].\{\dot{w}\} + [K].\{w\} = [A].\{p\} + \{F\}$$

nella quale $[M]$ è la matrice delle masse degli elementi della struttura, $[D]$ è la matrice dei termini smorzanti, $[K]$ è la matrice di rigidezza, $[A]$ è la matrice delle aree di contatto fra gli elementi della struttura ed il mezzo acustico. Il vettore $\{F\}$ rappresenta la forza esterna applicata ad ogni elemento della struttura.

Cerchiamo ora una soluzione dell'equazione differenziale (39) o (42) del tipo:

(44)

$$p = \sum_{J=1}^n \phi_J(x, y, z) \cdot a_J$$

dove ϕ_J sono opportune funzioni del punto prefis-

sate e α_J sono dei valori incogniti, tali da rendere vera la (44).

In pratica la (44) va pensata come una definizione dei parametri α_J . Finché il numero n delle funzioni scelte è finito, la (44) fornirà sempre un valore di p diverso da quello vero: dunque, in generale si produrranno degli errori, ϵ , dati dalle:

$$\nabla^2 p + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 p = \epsilon_1 \neq 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial n} = \epsilon_2 \neq 0 \text{ sulle pareti rigide}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial n} + \rho \omega^2 w = \epsilon_2 \neq 0 \text{ sulle pareti mobili.}$$

I parametri α_J si determineranno dunque imponendo che la media pesata degli errori ϵ_1 e ϵ_2 sia nulla sul volume della cavità e sulla superficie del contorno:

(45)

$$\int_V \left(\nabla^2 p + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 p \right) \delta p \, dV - \int_S \frac{\partial p}{\partial n} \delta p \, dS = 0$$

Nella (45) è stato introdotto un "fattore di pesata" δp , definito come:

$$(46)$$

$$\delta p = \sum_{J=1}^n \phi_J \delta \alpha_J$$

nella quale a loro volta $\delta \alpha_J$ rappresentano le correzioni da dare agli α_J per rendere nullo il primo membro della (45).

Applicando il lemma di Green nel primo termine dell'equazione (45) si ha:

$$(47)$$

$$-\int_V \nabla p \cdot \nabla (\delta p) dV + \int_V \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \cdot p \delta p dV = 0$$

che può essere scritta in forma variazionale come:

$$(48)$$

$$\delta \int \frac{1}{2} \left[(\nabla p)^2 - \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \cdot p^2 \right] dV = 0$$

Sostituendo infine la (44) nella (48) si ottiene un sistema normale di equazioni lineari nei

nei parametri α_j .

Il problema può dunque essere risolto a patto di avere scelto con astuzia le funzioni arbitrarie $\phi_j(x,y,z)$. Ciò è molto semplice se noi suddividiamo il volume in un numero di elementi uguale al numero di funzioni arbitrarie da definire.

Poi definiamo la funzione arbitraria J-esima imponendo che essa descriva in modo semplice la variazione di pressione fra un nodo (nel quale la pressione si suppone convenzionalmente uguale a 1) e i nodi adiacenti (nei quali la pressione si suppone uguale a 0). Il tipo più semplice di queste funzioni è ovviamente quello lineare, ma si possono usare anche funzioni paraboliche, ecc.

Nel caso in cui non esistano pareti mobili, si ottiene un sistema del tipo:

(49)

$$[G] \cdot \{p\} = 0$$

mentre nel caso di pareti mobili, con velocità $\dot{w}$,
ho:

(50)

$$[G].\{p\} = -i\omega[A].\{w\}$$

Per esplicitare le soluzioni, occorre dunque riuscire a scrivere la matrice dei coefficienti $[G]$.

L'algoritmo che permette di calcolare gli elementi di $[G]$ è abbastanza complesso, e dipende, oltre che dal tipo di funzione scelto, anche dalla forma degli elementi (triangolari, rettangolari, parallelepipedi, tetraedrici, ecc.) *(1)

In generale ogni elemento di $[G]$ conterrà

*(1) - Vedi ad esempio [19], nella quale sono presentati gli algoritmi per il riempimento della matrice $[G]$ mediante 4 metodi: diretto, potenziale singolo, potenziale doppio, potenziale ibrido, e nel caso di elementi della superficie radiante triangolari, con interpolazione lineare o parabolica.

come parametro anche la pulsazione ω . A questo punto, supponendo di avere determinato la matrice $[G]$, abbiamo i due casi di pareti rigide e mobili.

Nel caso di pareti rigide, essendo nullo il secondo membro dell'equazione (49), è necessario che il determinante della matrice $[G]$ si annulli, per cui otteniamo la soluzione solo per quelle pulsazioni ω che soddisfano alla $|G(\omega)| = 0$.

Chiaramente troveremo n autovalori della matrice, a cui corrispondono gli n modi propri della cavità da noi studiata.

In pratica, in questo modo, otteniamo come parametri in uscita le frequenze proprie della cavità, ma non abbiamo alcuna informazione sulle pressioni acustiche prodotte da una azione esterna. Viceversa, nel caso di pareti mobili con legge assegnata, è nota a priori la pulsazione ω con cui sollecitiamo il sistema, ed in generale essa non sarà tale da annullare il determinante della

matrice $[G]$.

E' dunque possibile ottenere le pressioni acustiche in ogni elemento nella forma:

(51)

$$\{p\} = -i\omega[G]^{-1}[A]\{\dot{w}\}$$

ottenuta dalla (50) nell'ipotesi che la matrice $[G]$ ammetta l'inversa.

Nella soluzione tipo (51) è facile osservare la similitudine con l'equazione (16). Gli elementi della $[G]^{-1}$ sono dunque i valori della funzione di Green fra gli elementi del volume e quelli delle pareti mobili.

L'equazione (51) fornisce valori diversi per ogni diversa pressione introdotta, per cui fornisce la risposta in frequenza della cavità a movimenti assegnati *(2).

*(2) - Volendo il diagramma di flusso corrispondente all'equazione (51) si veda [10]. In questo articolo viene presentato un procedimento ad elementi fini-

1-7-2 - Metodo agli elementi finiti per calcolare le frequenze proprie di una cavità con pareti deformabili.

Facciamo ora l'ipotesi che le pareti mobili non siano sollecitate meccanicamente e vediamo se le frequenze proprie delle cavità sono diverse da quelle ottenute con pareti rigide. Per far ciò dobbiamo supporre di essere in grado di ricavare dall'equazione (43) (strutturale) la velocità $\{w\}$ in funzione delle pressioni acustiche $\{p\}$; ciò in generale è possibile, con un metodo agli elementi finiti "strutturale" concettualmente analogo a quello visto nel sottoparagrafo precedente. La soluzione sarà del tipo: $\{\dot{w}\} = [r]^{-1}[A]\{p\}$.

Ricavato il valore dei $\{\dot{w}\}$, che appunto è espresso in funzione di $\{p\}$, lo andiamo a sostit-

ti, triangolari o rettangolari, che permette, una volta ottenute da un metodo strutturale le velocità degli elementi, e mantenendo sulla superficie lo stesso reticolo di elementi usato per il calcolo strutturale, di calcolare le pressioni sonore in prossimità della superficie radiante.

tuire nell'equazione (50); in essa, raggruppando i termini al 1° membro, abbiamo:

(52)

$$[G].\{p\} + i\omega[A].[r]^{-1}.[A].\{p\} = 0$$

che può essere espresso nella forma:

(53)

$$[Q].\{p\} = 0$$

Nella (53) la matrice $[Q]$ può essere ottenuta dalle matrici $[G]$, $[A]$, $[r]$, mediante le regole del calcolo matriciale.

Perché l'equazione (53) sia soddisfatta, deve annullarsi il determinante della matrice $[Q]$, e ciò avviene solo per n valori (autovalori) della pulsazione ω . Inoltre troveremo che il problema diventa insolubile alle frequenze ω , proprie della struttura.

Ecco che anche in questo caso troviamo i valori delle frequenze proprie delle cavità, e questi valori sono in generale differenti da quelli ottenuti prima nel caso di pareti rigide.

Se però le pareti sono molto rigide in rapporto alle caratteristiche elastiche del mezzo acustico, vedremo che le frequenze proprie della cavità sono molto prossime ai valori ottenuti in prima approssimazione, supponendo le pareti rigide.

]-7-3 - Soluzione del problema generale.

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto come ottenere le frequenze proprie di una cavità a pareti rigide, nonché le pressioni prodotte dal movimento delle pareti. Per far ciò abbiamo dovuto risolvere il solo problema acustico.

Ammesso poi di aver risolto, sempre con gli

elementi finiti, in modo formalmente analogo, il problema strutturale a se stante, abbiamo visto come, nell'ipotesi che non ci fossero azioni forzanti $\{F\}$, si ottiene l'equazione omogenea (52) che permette di ricavare le frequenze proprie della cavità con pareti elastiche.

Ora ammettiamo invece che nella (43) ci siano anche le $\{F\}$; la soluzione, agli elementi finiti, dell'equazione (43) sarà del tipo:

(53)

$$\{\dot{w}\} = [r]^{-1}([A] \cdot \{p\} + \{F\})$$

per cui sostituendo nella (50) ottengo:

(54)

$$([G] + i \cdot \omega \cdot [A] \cdot [r]^{-1} \cdot [A]) \cdot \{p\} = -i \omega [A] \cdot [r]^{-1} \cdot \{F\}$$

ponendo dunque:

(55)

$$[U] = [G] + i \cdot \omega \cdot [A] \cdot [r]^{-1} \cdot [A]$$

posso ottenere una soluzione generale del tipo:

(56)

$$\{p\} = -i \cdot \omega \cdot [U]^{-1} \cdot [A] \cdot [r]^{-1} \cdot \{F\}$$

Confrontando l'equazione (56) con la (22),
posso anche arrivare a porre:

(57)

$$[H]^{-1} = -i \cdot \omega \cdot [U]^{-1} \cdot [A] \cdot [r]^{-1}$$

e definire così la matrice della funzione di risposta in frequenza $H(\bar{R}_J, \bar{R}_L)$.

In questo caso siamo dunque riusciti ad ottenere, dalla soluzione dei metodi agli elementi finiti per la struttura e per il campo acustico, una relazione che permette, ad ogni frequenza alla quale non si annulli il determinante della $[G]$ o della $[r]$, il calcolo delle pressioni acustiche

prodotte da una assegnata forza esterna $F^{*(3)}$.

1-7-4 - Precisione del metodo.

E' intuitivo capire che al crescere del numero n degli elementi cresce la precisione del procedimento. Tuttavia è interessante notare come la precisione non sia uniforme nei risultati: ad esempio, nel caso del calcolo degli autovalori della cavità a pareti rigide, si ha la massima precisione sul primo modo proprio della cavità, poi essa cala rapidamente con il rapporto $(\frac{m}{n})^2$, ove m è l'ordine del modo in esame ed n il numero degli elementi.

*(3) - Una soluzione generale al problema strutturale-acustico, basata sull'uso del metodo di risoluzione strutturale agli elementi finiti nastran, usato sia per valutare il problema strutturale che quello acustico, si può trovare enunciata in [22]. Gli stessi autori nel 1976 utilizzarono il metodo da loro proposto per valutare i campi acustici prodotti all'interno dell'abitacolo di automobili, nell'ipotesi però che il campo acustico fosse trascurabile per la struttura, rispetto alle sollecitazioni meccaniche.

Ecco che, se vogliamo avere ad esempio un errore limitato al 10% nello studio dei primi 5 modi, non potremo usare un reticolo con solo 5 elementi, ma ne occorreranno molti di più! [22]. Ciò è chiaro pensando al fatto che i modi di ordine più elevato implicano più alte frequenze, cioè più bassa lunghezza d'onda, e che quando la lunghezza d'onda diventa confrontabile con il lato di un elemento, esso non è più in grado di descrivere adeguatamente la forma dell'onda stazionaria.

Capitolo II

CONDIZIONI

PER IL PROGETTO E LA PROVA DEI MODELLI

La formulazione dell'interazione acustica e strutturale prima enunciata presenta il vantaggio di mostrare la mutua influenza tra il campo acustico e le vibrazioni elastiche della struttura, ma la soluzione delle equazioni (18), (20) e (21) del precedente capitolo, è generalmente così difficile che esse divengono praticamente inutilizzabili.

Volendo studiare il comportamento meccanico ed acustico delle strutture reali è necessario ricorrere a misure sperimentali, onde poter ricavare la velocità di punti della struttura, la loro impedenza all'applicazione di forze e i livelli di pressione sonora generati dal campo acustico all'interno.

Naturalmente le misure eseguite su prototipi sono molto costose, sia per il tempo che per i mezzi impiegati e non consentono di studiare in breve tempo gli effetti di modifiche strutturali.

In questi casi i modelli in scala rappresentano un metodo conveniente per determinare il comportamento di complessi sistemi meccanici, in confronto ai prototipi spesso ingombranti.

I modelli in scala invece possono essere piccoli, poco costosi, facili da modificare e molto maneggevoli. Inoltre è possibile progettare i modelli in modo tale da rendere più semplici le misure necessarie e su di essi è possibile operare dentro ai laboratori, ripetendo le misure quanto si vuole e giovandosi di tutte le attrezzature a disposizione.

Spesso la forma dei modelli può essere semplificata e non occorre più il controllo accurato dei parametri ambientali durante le prove.

Va detto però che l'uso dei modelli in scala comporta anche certi svantaggi, come l'impossibilità di riprodurre il prototipo in tutti i suoi aspetti. Lo sperimentatore deve perciò essere sicuro che le approssimazioni introdotte non siano tali da ridurre l'attendibilità delle misure a livelli insoddisfacenti.

Inoltre anche la riduzione di scala rende a volte problematiche certe misure: piccole deformazioni strutturali del prototipo richiederebbero strumenti di precisione inesistenti per essere rilevati sul modello. E' ben vero però che in casi come questo, se lo scopo del modello era proprio lo studio di queste deformazioni, è possibile progettare il modello in modo tale che l'ampiezza delle deformazioni non venga ridotta.

In generale i modelli diventano molto attendibili proprio in quei casi nei quali migliore è la conoscenza delle relazioni che regolano il

comportamento del prototipo, ma proprio in questi casi i modelli sono meno utili: dunque la condizione ottimale per l'uso di modelli in scala è quando sono note tutte le leggi che governano i fenomeni da studiare, ma per difficoltà analitiche non si riescono a ricavare da esse i risultati quantitativi necessari.

Per ottenere le condizioni da rispettare nel progettare e provare i modelli ci serviremo di alcuni metodi derivanti dall'analisi dimensionale.

2-1 - ANALISI DIMENSIONALE

L'analisi dimensionale è una disciplina che si propone di fornire indicazioni utili nella soluzione di un problema basandosi solo sullo studio delle dimensioni delle grandezze che compaiono nel problema medesimo.

Ogni equazione ricavata dalle leggi fonamen-

tali della meccanica è sempre indipendente, nella sua forma, dalla particolare scelta delle unità di misura delle grandezze. Tutte le equazioni che godono di questa proprietà sono dette "equazioni fisiche"; esistono altre equazioni, di origine sperimentale, che non godono di queste proprietà: sono dette "equazioni empiriche" ed a lato di esse debbono sempre essere indicate le unità di misura che rendono vera l'equazione.

Supponiamo che in un certo sistema fisico siano implicate n variabili ($v_1, v_2, \dots, v_n$) e U unità di misura fondamentali. Supponiamo inoltre che il comportamento del sistema sia descritto da un'equazione fisica del tipo:

(1)

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$$

Poiché la forma della funzione f non deve cambiare anche cambiando la grandezza delle unità

fondamentali, si può mostrare che la funzione f può essere sostituita da un'altra funzione F che lega fra loro, come variabili, dei raggruppamenti delle variabili precedenti, privi però di dimensioni; denomineremo con $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ questi raggruppamenti.

Considerato che ogni variabile ha la forma di un prodotto delle unità fondamentali elevati ad opportuni esponenti, allora anche i termini π_1, π_2 , ecc. saranno ottenuti come prodotto delle variabili di partenza elevate ad opportuni esponenti. Riguardo a ciò può essere enunciato il teorema di Buckingham [3]:

"Un'equazione fisica, avente n variabili ed U unità fondamentali, può sempre essere scritta nella forma:

(2)

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m) = 0$$

dove le variabili π sono termini indipendenti e privi di dimensioni, che hanno la forma di prodotti di potenze delle variabili. Il numero minimo di questi raggruppamenti deve essere $n-U''$,

cioè, è:

(3)

$$m_{\min} = n-U$$

2-2 - LA TEORIA DEI MODELLI

La teoria di base dei modelli può essere sviluppata direttamente dalle premesse di analisi dimensionale ora citate. Supponiamo, infatti, di poter risolvere l'equazione di Buckingham (24) rispetto ad uno dei raggruppamenti:

(4)

$$\pi_1 = F'(\pi_2, \pi_3, \dots)$$

Il fattore π_1 contenga per esempio la variabile che ci interessa misurare; supponiamo di avere un modello in scala e di scrivere l'equazione (4) sia per esso che per il prototipo di partenza:

(5)

$$\pi_{1p} = F'(\pi_{2p}, \pi_{3p}, \dots)$$

$$\pi_{1m} = F'(\pi_{2m}, \pi_{3m}, \dots)$$

F' è la stessa in entrambi i casi, poiché non dipende dalla scelta delle unità di misura.

Se vogliamo che sia $\pi_{1p} = \pi_{1m}$ allora deve essere:

(6)

$$F'(\pi_{2p}, \pi_{3p}, \dots) = F'(\pi_{2m}, \pi_{3m}, \dots)$$

che evidentemente è soddisfatta se:

(7)

$$\pi_{2m} = \pi_{2p}; \quad \pi_{3m} = \pi_{3p}; \quad \text{ecc.}$$

In questo caso è anche:

(8)

$$\pi_{1m} = \pi_{1p}$$

Possiamo dunque dire, al di là della reale conoscenza di F' , che il modello riprodurrà esattamente il fenomeno del prototipo se e solo se sono state rispettate tutte le condizioni (7), che dunque vengono dette "equazioni di progetto"; grazie poi all'equazione (8) è possibile calcolare il valore numerico della variabile che ci interessava, per cui l'equazione (8) è chiamata "equazione di predizione".

2-3 - ANALISI DEI MODELLI BASATA SULLE EQUAZIONI DEL MOTO DEL SISTEMA

Ci sono 3 metodi fondamentali per ricavare le condizioni di progetto e di prova, tutti e 3 basati sui principi dell'analisi dimensionale:

- 1) Se tutto quello che si sa del prototipo è che le grandezze fondamentali, massa, lunghezza e tempo, sono sufficienti a descrivere il problema, non resta che applicare il cosiddetto metodo di Newton, cioè costruire un modello con gli stessi materiali, le stesse caratteristiche dell'originale, riducendo in scala le lunghezze e i tempi e nel cubo della scala le masse. Questo procedimento è molto restrittivo e rende poco attuabile la realizzazione di modelli in scala.
- 2) Se il fenomeno da studiare è meglio conosciuto, allora è possibile trascurare in parte alcuni aspetti del problema, dimostratisi ininfluenti, e semplificare le condizioni da rispet-

tare, sapendo che gli errori andranno a colpire variabili che a noi non interessano.

- 3) Se infine è possibile scrivere le singole equazioni del moto che descrivono il prototipo, anche se in forma differenziale, allora l'analisi dimensionale consente effettivamente di effettuare la messa in scala rispettando solo gli n -U parametri previsti dalla Trattazione precedente e senza alcun vincolo sui materiali o su singole grandezze. Inoltre, osservando l'equazione differenziale, è possibile trascurare, in certi casi, il contributo di alcuni termini.

Considerando che le strutture dei veicoli molto spesso possono essere considerate come costituite di travi snelle, di lastre piane e di lastre curve (le cui equazioni del moto sono ben conosciute), si può capire che il metodo n°3) è quello che fornisce i risultati più fecondi.

Per ricavare i raggruppamenti adimensionali da rispettare, è possibile agire direttamente sulle equazioni differenziali, rendendole esse stesse adimensionali, mediante opportuni cambiamenti e sostituendo variabili adimensionalizzate a quelle ordinarie.

Nei paragrafi seguenti questo metodo sarà impiegato diffusamente: all'inizio sarà considerata l'equazione dell'onda in un mezzo acustico, in seguito l'equazione del moto delle strutture eccitate acusticamente e/o meccanicamente.

Come già menzionato le strutture vengono suddivise negli elementi strutturali più semplici: travi, lastre piane, lastre curve. Infine, sarà fatto cenno al problema dell'accoppiamento acustico fra struttura e mezzo acustico, chiudendo dunque l'anello del diagramma di flusso che già avevamo osservato nella Figura 1.

2-3-1 - Assunzioni.

Si assume che sia il fluido sia la struttura obbediscano alle equazioni costitutive lineari. Per la struttura questo significa che ciascuna componente di deformazione è una funzione lineare delle componenti di tensione e, per il fluido, che le variazioni di pressione rispetto al valore idrostatico sono una funzione lineare della variazione percentuale della densità, o, se si vuole, del volume specifico: dunque le equazioni del moto di entrambi i mezzi sono valide solo per i piccoli valori dei segnali di eccitazione. Si assume inoltre che i fluidi siano omogenei ed inizialmente in riposo.

Il fluido acustico non è viscoso e segue la legge di Pascal.

2-3-2 - Equazione acustica.

Sotto queste ipotesi è possibile mostrare che la pressione sonora in un mezzo acustico è descritta dall'equazione d'onda tridimensionale.

(9)

$$\nabla^2 p(\bar{R}_J) - \left(\frac{\rho_0}{E}\right) \frac{\partial^2 p(\bar{R}_J)}{\partial t^2} = 0$$

che sappiamo assumere una soluzione del tipo

$$p(\bar{R}_J, t) = p'(\bar{R}_J) e^{-i\omega t}$$

Inoltre sulla superficie irradiante il campo acustico deve essere soddisfatta questa condizione al contorno:

(10)

$$\left. \frac{\partial p(\bar{R}_J)}{\partial n} \right|_S = -\rho_0 \frac{\partial^2 w(\bar{R}_0)}{\partial t^2} = \rho_0 \omega^2 w(\bar{R}_0)$$

Sostituiamo ora in queste equazioni alle variabili dimensionate queste espressioni:

$$(11)$$

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{v^{*2}}{L^2}; & p &= p^* \bar{p} \\ t &= \frac{t^*}{\omega} & w &= w^* L \\ & & n &= n^* L \end{aligned}$$

ove L è una dimensione caratteristica della geometria in esame e v^* , p^* , w^* , n^* sono entità adimensionali, mentre $\bar{p}$ è un valore di riferimento costante.

Con queste nuove variabili le due equazioni (9) e (10) divengono:

$$(12)$$

$$\bar{p} (v^{*2} p^* - (\frac{\rho_0}{E}) \omega^2 L^2 \frac{\partial^2 p^*}{\partial t^{*2}}) = 0$$

(13)

$$\frac{\partial p^*}{\partial n^*} = \frac{\rho_0^2 \omega^2 L}{\bar{p}} \cdot w^*$$

notiamo che è

(14)

$$\frac{E}{\rho_0} = c_0^2$$

essendo entrambe in forma adimensionale, debbono restare costanti i raggruppamenti in esse contenuti, cioè:

(15)

$$\frac{\omega L}{c_0} = \text{cost}$$

e

(16)

$$\frac{\rho_0 \omega^2 L^2}{\bar{p}} = \text{cost}$$

La prima - cioè la (15) - ci dice in pratica che se il mezzo acustico rimane lo stesso le frequenze aumentano nello stesso rapporto della scala di riduzione (Teorema di Savart) [18].

La seconda, la (16), mostra invece che, sempre se il mezzo acustico rimane lo stesso, la pressione sonora non cambia. Entrambe queste condizioni andranno sempre rispettate nella realizzazione di un modello acustico.

2-3-3 - Vibrazioni longitudinali di una trave elastica.

Le vibrazioni longitudinali delle travi non sono solitamente esse stesse un'importante sorgente di radiazione sonora, ma esse possono eccitare vibrazioni flessionali e anche moti rigidi delle lastre che si trovano connesse con gli estremi delle aste stesse, e che si comportano come ben più efficienti radiatori acustici.

Le vibrazioni longitudinali possono sovente essere considerate "libere", ma è tuttavia possibile che lungo la trave le lastre che qui si appoggiano trasmettano azioni forzanti dirette lungo l'asse della trave, (azioni forzanti) che derivano da vibrazioni "nel piano" delle lastre stesse.

Ecco che nelle equazioni delle vibrazioni longitudinali compare un termine forzante $q' [\frac{N}{m}]$.

Ricordiamo inoltre che un eventuale sforzo assiale applicato ad un estremo della trave non è un termine forzante, ma una condizione al contorno del sistema meccanico.

Consideriamo dunque una trave snella elastica dotata di sezione costante di area A , orientata con l'asse longitudinale coincidente con l'asse x del nostro riferimento.

Nell'ipotesi di tensione uniforme in ogni punto della sezione della trave, possiamo affermare che la sezione stessa resta piana e si può

scrivere l'equazione del moto partendo dalla 2.a legge di Newton ($F=m.a$); si ottiene, avendo chiamato $u(x,t)$ lo spostamento di una sezione dalla posizione di riposo:

(17)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho_s}{E} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{q'(x,t)}{E \cdot A}$$

inoltre abbiamo le condizioni al contorno:

(18)

ESTREMO INCASTRATO

$$u(x=0,t) = 0$$

e

(19)

ESTREMO LIBERO SOLLECITATO

$$N(x=0,t) = E \cdot A \frac{\partial u(x=0,t)}{\partial x} = F(t)$$

Procediamo per queste equazioni alle seguenti sostituzioni:

(20)

$$t = \frac{t^*}{\omega} \quad u = u^* \cdot L \quad x = x^* \cdot L$$

ove i parametri t^* , u^* , x^* sono adimensionali e sia L che ω sono grandezze caratteristiche del sistema considerato.

Con queste sostituzioni, le equazioni (17), (18), (19) divengono:

(21)

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\rho_s}{E} \cdot \omega^2 L^2 \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}} + \frac{q' L}{EA}$$

(22)

$$u^*(x=0, t) = 0$$

(23)

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} = \frac{F}{EA}$$

da esse è possibile ricavare questi raggruppamenti adimensionali (che debbono restare costanti per quanto detto prima).

(24)

$$\frac{\rho_S}{E} \omega^2 L^2 = \text{cost}$$

(25)

$$\frac{q'}{EA} = \text{cost}$$

(26)

$$\frac{F}{EA} = \text{cost}$$

Il primo, (24), lega la frequenza alla velocità del suono nel mezzo ($c_S = \sqrt{\frac{E}{\rho_S}}$); considerando già soddisfatta la condizione acustica (15), ne segue la necessità di mantenere costante la velocità del suono. Il secondo (25) ed il terzo (26)

consentono di raffrontare le risposte del modello e del prototipo all'intensità delle sollecitazioni loro impresse: infatti, per produrre i medesimi risultati, le sollecitazioni impresse dovranno essere messe in scala secondo queste due condizioni. Concettualmente, comunque, le (25) e (26) esprimono la stessa condizione.

2-3-4 - Vibrazioni flessionali in una trave snella

In questo caso si ammette il moto della trave in direzione ortogonale al suo asse longitudinale, cioè una vibrazione trasversale; come è immediato comprendere, ciò comporta una sollecitazione flessionale della struttura.

Per semplificare la trattazione, supponiamo che la flessione non sia deviata, cosicché il moto della trave rimane nel piano perpendicolare all'asse neutro e non compaiono rotazioni torsionali delle sezioni della trave.

Come è noto, il caso più generale può essere scomposto in due sottocasi semplici, quali quello che noi ora affrontiamo. L'ipotesi fondamentale è sempre quella di conservazione delle sezioni piane.

Dalla solita 2.a legge di Newton ricaviamo:

(27)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho_s A}{EI} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{q'(x,t)}{EI}$$

con essa vanno considerate le seguenti condizioni al contorno:

(28)

ESTREMO LIBERO

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -\frac{F}{EI} \quad (\text{TAGLIO}) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI} \quad (\text{MOMENTO})$$

(29)

ESTREMO INCASTRATO

$$w = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

(30)
ESTREMO INCERNIERATO

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{M}{EI} \text{ (MOMENTO)}$$

ove F e M sono azioni concentrate applicate all'estremo della trave.

Come sempre sostituiamo in queste equazioni i parametri adimensionali segnati con un asterisco e cioè:

(31)

$$t = \frac{t^*}{\omega}; \quad w = w^* \cdot L; \quad x = x^* L$$

e otteniamo:

(32)

$$\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} + \frac{\rho_s A}{EI} \omega^2 L \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} = - \frac{L^3 q'}{EI}$$

(33)

$$\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^3} = - \frac{FL^2}{EI}$$

$$w^* = 0$$

$$w^* = 0$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = - \frac{ML}{EI}$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = - \frac{ML}{EI}$$

da cui ottengo i parametri adimensionali da mantenere costanti:

(34)

$$\frac{\rho_s A}{EI} \omega^2 L^4 = \text{cost}$$

(35)

$$\frac{q' L^3}{EI} = \text{cost}$$

(36)

$$\frac{FL^2}{EI} = \text{cost}$$

(37)

$$\frac{ML}{EI} = \text{cost}$$

La prima, (34), lega la frequenza con le caratteristiche del materiale ($\frac{E}{\rho_s}$) e con il parametro $\frac{I}{A} = r^2$, quadrato del raggio d'inerzia. Supponendo già soddisfatte le (15) e (24), si ottiene semplicemente:

(38)

$$\frac{r}{L} = \text{cost}$$

cioè occorre mettere in scala i raggi d'inerzia.

Le altre condizioni (35, 36, 37) sono equipollenti fra loro e legano come prima le intensità delle sollecitazioni esterne alla risposta del modello.

Va detto che per rispettare contemporaneamente

te la (35) e la (25) si ottiene nuovamente:

(39)

$$\frac{r}{L} = \text{cost}$$

2-3-5 - Vibrazioni longitudinali in una lastra piana.

Ci riallacciamo qui alla trattazione fatta al paragrafo 2-3-3, notando che l'equazione dell'onda longitudinale rimane formalmente la stessa, anche se nel caso delle lastre è impedita la contrazione laterale dell'elemento di volume per cui il modulo di elasticità E del materiale va diviso per il fattore $(1-\nu^2)$; dunque l'equazione (17) diviene:

(40)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho_s (1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{q(x,t) \nu (1-\nu^2)}{E \cdot h \cdot \nu}$$

ove h è lo spessore della lastra e b la sua larghezza; analogamente la (19) diviene:

(41)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = q' \frac{(1-\nu^2)}{Eh}$$

E' da notare che ora q è una tensione tangenziale in N/m^2 , applicata sulla superficie della lastra, mentre q' è un carico per unità di lunghezza ($\frac{N}{m}$) sul bordo libero della lastra stessa.

Con il solito procedimento di sostituzione, ponendo:

(42)

$$t = \frac{t^*}{\omega} \quad x = x^* \cdot L \quad u = u^* \cdot L$$

si ricava:

(43)

$$\frac{\omega^2 L^2 \rho_s}{E} \cdot (1-\nu^2) = \text{cost}$$

(44)

$$\frac{qL}{Eh}(1-\nu^2) = \text{cost}$$

(45)

$$\frac{q'}{Eh}(1-\nu^2) = \text{cost}$$

come sempre la (43) lega la frequenza alle caratteristiche del materiale (velocità del suono $c = \sqrt{\frac{E}{\rho_s}}$), mentre le altre 2 consentono la messa in scala delle sollecitazioni strutturali.

2-3-6 - Vibrazioni flessionali di una lastra piana.

Il problema delle vibrazioni flessionali di una lastra, diversamente da quelli precedentemente considerati, è un problema essenzialmente bidimensionale.

Chiamato h lo spessore della lastra, supposta uniforme, prendiamo gli assi cartesiani x e y nel piano della lastra stessa. Fatte le ipotesi di spostamenti w secondo z piccoli rispetto ad h , nonché supposta la conservazione della normale rettilinea, si ottiene come sempre l'equazione del moto [21]:

(46)

$$\nabla^2 w + \frac{\rho_s \cdot 12(1 - \nu^2)}{E h^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q \frac{12(1 - \nu^2)}{E h^3}$$

assieme ad essa vanno considerate le condizioni al contorno:

(47)

LATO INCASTRATO

$$w \Big|_1 = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_1 = 0$$

(48)

LATO APPOGGIATO

$$w \Big|_1 = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_1 = -m \frac{12(1 - \nu^2)}{E h^3}$$

(49)
LATO LIBERO

TAGLIO DI KIRCKOFF

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3 \partial y} \Big|_1 = \frac{12(1-\nu^2)}{E h^3} \left(t + \frac{\partial m}{\partial y} \right)$$

(50)
MOMENTO DI KIRCKOFF

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_1 = \begin{cases} 0 \\ -m \frac{12(1-\nu^2)}{E h^3} \end{cases}$$

ove m è un momento per unità di lunghezza di bordo
e t un taglio per unità di lunghezza. Adimensiona-
lizziamo ora queste equazioni con le solite posi-
zioni:

(51)

$$t = \frac{t^*}{\omega} \quad x = x^* \cdot L \quad y = y^* \cdot L$$

$$w = w^* \cdot L \quad \nu^* = \frac{\nu^*}{L^4}$$

ove L ed ω sono parametri caratteristici del si-

stema e i termini asteriscati sono variabili adimensionali. Con queste sostituzioni ottengo:

(52)

$$\nabla^{*4} w^* + \frac{\omega^2 L^4 \rho_s (1-v^2)}{E \cdot h^2} \cdot 12 \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} = -12 \frac{q L^3 (1-v^2)}{E h^3}$$

(53)

LATO INCASTRATO

$$w^* = 0 \qquad \frac{\partial w^*}{\partial y^*} = 0$$

LATO APPOGGIATO

$$w^* = 0 \qquad \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} = -12 \frac{m L (1-v^2)}{E h^3}$$

LATO LIBERO

$$\frac{\partial^3 w^*}{\partial y^{*3}} + (2-v) \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^* \partial y^*} = 12 \frac{L^2 (1-v^2)}{E h^3} \left(t + \frac{\partial m}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + v \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} = -12 \frac{m L (1-v^2)}{E h^3}$$

Si ottengono, dunque, questi raggruppamenti adimensionali da rispettare nella messa in scala:

(54)

$$\frac{\omega^2 L^4 \rho_s}{E h^2} \cdot (1-v^2) = \text{cost}$$

(55)

$$\frac{q L^3 (1-v^2)}{E h^3} = \text{cost}$$

(56)

$$\frac{m L (1-v^2)}{E h^3} = \text{cost}$$

(57)

$$\left(t + \frac{\partial m}{\partial y} \right) \frac{L^2 (1-v^2)}{E h^3} = \text{cost}$$

(58)

$$v = \text{cost}$$

La prima condizione (54) rappresenta il solito legame fra frequenza e velocità del suono $c_s = \sqrt{\frac{E}{\rho_s}}$, ma, contrariamente ai casi precedenti, poiché è possibile giocare sul valore di h , ora essa non impone più la costanza di c_s !

Le condizioni (55) e (56) consentono la messa in scala delle sollecitazioni esterne e sono sostanzialmente equipollenti.

Infine le condizioni (57) e (58) sono ulteriori restrizioni che è necessario subire se la lastra presenta lati liberi. Particolarmente gravosa è la condizione (58), poiché è difficile trovare materiali da modellistica con lo stesso modulo di Poisson del prototipo.

La presenza della condizione (58) può essere facilmente spiegata pensando che lungo un lato libero la contrazione laterale non è impedita e dunque qui il materiale si deve contrarre nella giusta misura.

Il problema può però essere risolto collocando idealmente lungo il bordo libero una trave, che andrà progettata di conseguenza. Ciò equivale a collocare materiale con lo stesso modulo ν solo dove esso serve, per garantire il rispetto locale della condizione al contorno.

2-3-7 - Vibrazioni nelle lastre curve.

In questo paragrafo consideriamo le vibrazioni di elementi strutturali che nel loro stato indeformato hanno un'apprezzabile curvatura. Il comportamento vibrazionale di queste strutture del tipo "a conchiglia" ha assunto importanza ingegneristica con l'avvento dell'aeronautica e dell'astronautica.

Esistono soluzioni analitiche del problema solo nel caso di geometrie particolari, quali coni, cilindri, sfere, ecc., e con svariate condi-

zioni al contorno.

La conoscenza delle soluzioni analitiche permette di prevedere le risposte alle sollecitazioni di queste lastre curve. In casi geometricamente più complicati è sempre possibile risolvere numericamente il problema, mediante i metodi delle differenze finite o degli elementi finiti.

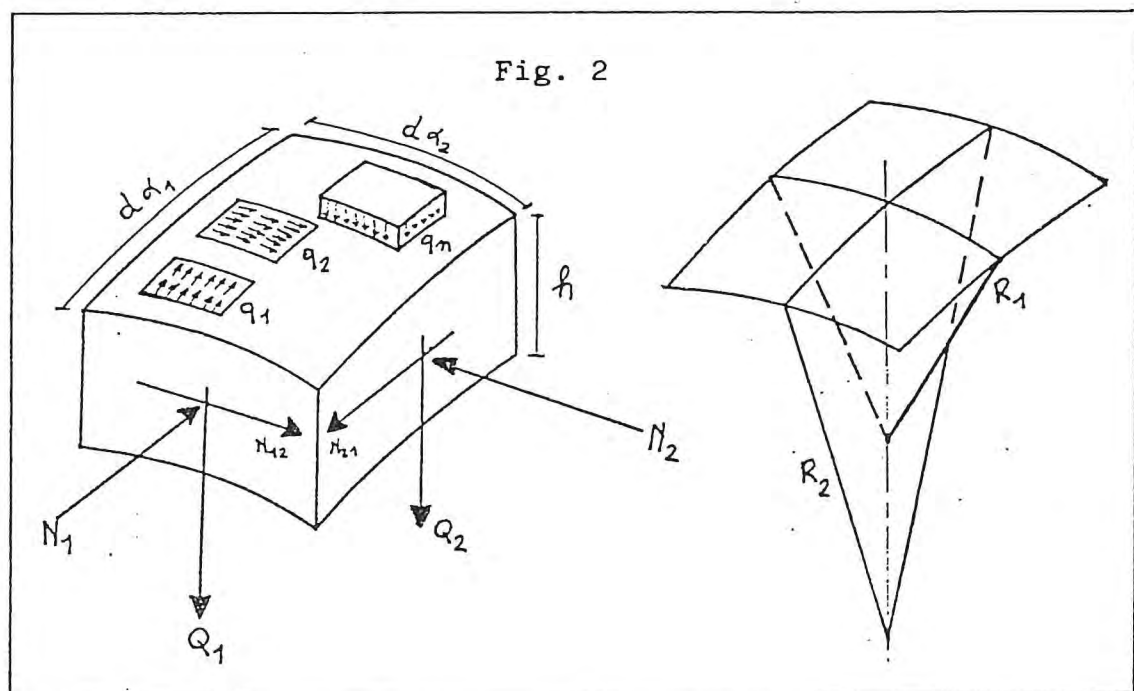
Ciò è attuabile però solo per strutture non troppo complicate, altrimenti la mole di dati diviene così grande da rendere troppo lungo e costoso il procedimento numerico. Proprio nei casi di strutture curve più complesse, dunque, diviene necessario servirsi di sperimentazioni e chiaramente l'uso dei modelli si impone come ottimale [20].

Vedremo però che qui l'applicazione diretta del procedimento finora usato porterà a definire condizioni molto restrittive, in particolare la necessità di mettere in scala lo spessore h della

lastra. In seguito vedremo anche che, se è possibile trascurare le vibrazioni flessionali rispetto a quelle membranali (o viceversa), si può giungere a condizioni di messa in scala meno restrittive.

2-3-8 - Condizioni "esatte" per le vibrazioni nelle lastre curve.

Nelle solite ipotesi di piccoli spostamenti, regime elastico lineare, conservazione della normale rettilinea, adottiamo la seguente notazione (chiarita dalla Figura 2).



- α_1, α_2 : coordinate curvilinee;
 R_1, R_2 : raggi di curvatura;
 u_1, u_2 : spostamenti secondo α_1, α_2 ;
 w : spostamento normale alla superficie;
 Q_1, Q_2 : azioni interne di taglio applicate all'elemento di lastra;
 q_1, q_2 : carichi esterni tangenziali unitari ($\frac{N}{m^2}$) secondo α_1 e α_2 ;
 N_1, N_2 : azioni interne normali applicate all'elemento di lastra;
 N_{12} : sforzo tangenziale interno applicato alle due facce concorrenti;
 q_n : sforzo esterno unitario ($\frac{N}{m^2}$) applicato normalmente all'elemento di lastra;

Inoltre occorre considerare i due coefficienti di forma A_1 e A_2 (adimensionali), definiti dalla relazione:

(59)

$$ds^2 = A_1^2 \cdot (d\alpha_1)^2 + A_2^2 \cdot (d\alpha_2)^2$$

dove s è l'ascissa curvilinea. Essi servono in pratica a rendere vero il teorema di Pitagora anche sulla superficie curva.

A_1 e A_2 sono in generale funzione del punto, e sono qui esprimibili in funzione dei raggi di curvatura e delle caratteristiche del riferimento curvilineo scelto.

A_1 e A_2 sono costanti su tutta la superficie solo sotto ipotesi restrittive, ad esempio per una superficie rigata che ha una delle coordinate curvilinee giacente secondo le righe e l'altra ortogonale ad essa.

Per superficie piane, o comunque sviluppabili su un piano (coni, cilindri), è ovviamente $A_1 = A_2 = 1$ a patto di avere scelto un riferimento curvilineo che sul piano diventi cartesiano.

Se nell'equazione (59) facciamo tendere a 0 da_1 e da_2 , otteniamo:

$$(60) \\ A_1^2 + A_2^2 = 2$$

Dunque con questi simboli possiamo scrivere le equazioni del moto della lastra curva nella forma di Love [11]:

(61)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(N_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \\ & + A_1 A_2 \left(\frac{Q_1}{R_1} + q_1 \right) = A_1 A_2 \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \end{aligned}$$

(62)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(N_2 A_1)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(N_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \\ & + A_2 A_1 \left(\frac{Q_2}{R_2} + q_2 \right) = A_2 A_1 \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \end{aligned}$$

(63)

$$\frac{\partial(Q_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(Q_2 A_1)}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) - A_1 A_2 q_n = A_1 A_2 \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Come si vede, la (62) si ottiene dalla (61) per permutazione degli indici 1 e 2, mentre la (63) è simmetrica rispetto agli stessi indici.

In queste equazioni compaiono le azioni interne N e Q, che sarebbero esprimibili con complicatissime relazioni in funzione delle sole componenti di movimento u, v, w, dei coefficienti di forma A_1 e A_2 e dei raggi di curvatura R_1 e R_2 , oltre che dei moduli di rigidezza flessionale e membranale, definiti come:

(64)

MODULO DI RIGIDEZZA MEMBRANALE

$$K = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}$$

MODULO DI RIGIDEZZA FLESSIONALE

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Ad esempio, è:

(65)

$$N_1 = K \left[\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R_1} + \right. \\ \left. + v \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{w}{R_2} \right) \right]$$

Analoghe espressioni, ancora più complicate, si possono scrivere per le altre azioni interne.

Se ora facciamo le solite posizioni:

(66)

$$u_1 = u_1^* \cdot L$$

$$u_2 = u_2^* \cdot L$$

$$w = w^* \cdot L$$

$$\alpha_1 = \alpha_1^* \cdot L$$

$$\alpha_2 = \alpha_2^* \cdot L$$

$$R_1 = R_1^* \cdot L$$

$$R_2 = R_2^* \cdot L$$

$$t = \frac{t^*}{\omega}$$

Sostituendo questi valori nelle equazioni tipo la (65), otteniamo relazioni di questo tipo:

$$(67)$$

$$N_1 = K \cdot \left[\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial u_1^*}{\partial \alpha_1^*} + \frac{u_2^*}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2^*} + \frac{w^*}{R_1^*} + \right. \\ \left. + v \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial u_2^*}{\partial \alpha_2^*} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1^*} + \frac{w^*}{R_2^*} \right) \right]$$

nella quale il contenuto della parentesi quadra è un fattore adimensionale; dunque si può porre:

$$(68)$$

$$N_1 = K \cdot N_1^*$$

ove N_1^* rappresenta il fattore adimensionale sopra citato.

Con notazione analoga, si ricava in via generale:

(69)

$$N_i = K \cdot N_i^*$$

$$Q_i = \frac{D}{L^2} \cdot Q_i^*$$

Sostituendo infine le (66) e le (69) nelle equazioni di Love, e ricordando le (64), otteniamo:

(70)

$$\frac{\partial N_1^* A_2}{\partial \alpha_1^*} + \frac{\partial N_{12}^* \cdot A_1}{\partial \alpha_2^*} + N_{12}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2^*} - N_2^* \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1^*} + \frac{A_1 A_2}{12} \cdot$$

$$\cdot \frac{Q_1^*}{R_1^*} \cdot \left(\frac{h}{L}\right)^2 + A_1 A_2 q_1 \cdot \frac{L(1-\nu^2)}{Eh} =$$

$$= \frac{\rho}{E} \cdot \omega^2 L^2 \cdot (1-\nu^2) \cdot A_1 A_2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}}$$

Dalla (70) si potrebbe ricavare la (71) per permutazione degli indici.

(72)

$$\left(\frac{\partial Q_1^* \cdot A_2}{\partial \alpha_1^*} + \frac{\partial Q_2^* \cdot A_1}{\partial \alpha_2^*} \right) \cdot \frac{1}{12} \left(\frac{h}{L} \right)^2 - \left(\frac{N_1^*}{R_1^*} + \frac{N_2^*}{R_2^*} \right) \cdot A_1 A_2 -$$

$$- A_1 A_2 \cdot q_n \cdot \frac{L(1-v^2)}{Eh} = \frac{\rho}{E} \cdot \omega^2 L^2 (1-v^2) \cdot A_1 A_2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}}$$

Per ottenere l'invarianza delle equazioni rispetto alle unità di misura deve essere:

(73)

$$\frac{h}{L} = \text{cost}$$

(74)

$$\frac{q_i \cdot L}{Eh} (1-v^2) = \text{cost}$$

(75)

$$\frac{\rho}{E} \cdot \omega^2 L^2 \cdot (1-v^2) = \text{cost}$$

La (75) rappresenta il solito legame fra frequenza e velocità del suono. La (74), invece, è la condizione da rispettare per la messa in scala delle azioni forzanti.

La (73) è una condizione molto restrittiva, che deriva concettualmente dall'interdipendenza, su una superficie non piana, fra le vibrazioni flessionali e quelle longitudinali.

Le (73), (74), (75) rappresentano dunque le condizioni esatte per la realizzazione in scala di lastre curve.

2-3-9 - Condizioni approssimate per le lastre curve. - Caso degli sforzi flessionali trascurabili.

Supponiamo di poter affermare, in base a considerazioni dettate dall'esperienza, o per analogia con casi già risolti, che in una particolare lastra curva la resistenza flessionale sia trascu-

rabile rispetto a quella membranale. Ciò in particolare è molto più corretto alle basse frequenze, in corrispondenza dei primi modi propri di vibrazione di strutture molto sottili ed estese; è vero anche, più in generale, qualora la lastra sia funicolare dei carichi.

Osservando dunque le equazioni già adimensionalizzate nella forma (70), (71), (72), possiamo porre uguali a zero i termini derivanti dalle azioni flettenti; in pratica scompaiono tutti i Q . Si ha così:

$$(76)$$

$$\frac{\partial N_1^* A_2}{\partial \alpha_1^*} + \frac{\partial N_{12}^* \cdot A_1}{\partial \alpha_2^*} + N_{12}^* \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2^*} - N_2^* \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1^*} + \frac{1}{12} A_1 A_2 \cdot$$

$$\cdot \frac{q_1 L}{Eh(1-\nu^2)} = \frac{\rho}{E} \omega^2 L^2 \cdot (1-\nu^2) A_1 A_2 \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^{*2}}$$

La (77) deriva dalla (76) con la permutazione degli indici.

(78)

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{N_1^*}{R_1^*} + \frac{N_2^*}{R_2^*}\right) A_1 A_2 - \frac{1}{12} \frac{qL}{Eh} \cdot (1-\nu^2) \cdot A_1 A_2 = \\ & = \frac{\rho}{E} \omega^2 L^2 (1-\nu^2) \cdot A_1 A_2 \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} \end{aligned}$$

Come si può vedere in queste 3 equazioni compaiono solo questi parametri adimensionali, che devono rimanere costanti:

(79)

$$\frac{\rho}{E} \cdot \omega^2 L^2 (1-\nu^2) = \text{cost}$$

(80)

$$\frac{q_i L}{Eh} \cdot (1-\nu^2) = \text{cost}$$

La prima, (79), in pratica coincide con la condizione (43) a suo tempo trovata per le vibra-

zioni longitudinali di una lastra piana; analogamente la (80) coincide con la (44) ricavata a suo tempo nelle stesse ipotesi.

Possiamo dunque concludere che, almeno dal punto di vista della messa in scala, le vibrazioni membranali di una lastra curva hanno lo stesso comportamento delle vibrazioni longitudinali di una lastra piana.

2-3-10 - Condizioni approssimate per le lastre curve. - Caso degli sforzi membranali trascurabili.

In condizioni di alte frequenze, ovvero di modi propri di ordine elevato, per strutture non troppo sottili e certamente non funicolari dei carichi, si possono trascurare le deformazioni membranali, dunque è lecito porre uguali a zero gli sforzi normali N in confronto degli sforzi taglienti Q .

In queste ipotesi le equazioni già adimensionalizzate (70), (71), (72), private dei termini derivanti dalle azioni membranali, si riducono così:

(81)

$$\frac{1}{12} \frac{Q_1^*}{R_1^*} + \frac{q_1 L^3 (1-\nu^2)}{Eh^3} = \frac{\rho}{E} \omega^2 \frac{L^4}{h^2} \cdot (1-\nu^2) \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^{*2}}$$

(82)

$$\frac{1}{12} \frac{Q_2^*}{R_2^*} + \frac{q_2 L^3 (1-\nu^2)}{Eh^3} = \frac{\rho}{E} \omega^2 \frac{L^4}{h^2} (1-\nu^2) \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial t^{*2}}$$

(83)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} \left(\frac{\partial Q_1^* \cdot A_2}{\partial \alpha_1^*} + \frac{\partial Q_2^* \cdot A_1}{\partial \alpha_2^*} \right) - A_1 A_2 \cdot \frac{q_n \cdot L^3 (1-\nu^2)}{Eh^3} = \\ & = \frac{\rho}{E} \omega^2 \frac{L^4}{h^2} (1-\nu^2) A_1 A_2 \frac{\partial^2 w^*}{t^{*2}} \end{aligned}$$

Perché queste espressioni valgono immutate anche dopo la riduzione in scala, deve essere:

(84)

$$\frac{\rho}{E} \omega^2 \frac{L^4}{h^2} (1 - \nu^2) = \text{cost}$$

(85)

$$\frac{q_i L^3 (1 - \nu^2)}{E h^3} = \text{cost}$$

La (84) coincide con la condizione (54) ricavata a suo tempo per le vibrazioni flessionali di una lastra piana; inoltre la (85) coincide con la condizione (55), ricavata a suo tempo in quelle ipotesi.

Possiamo affermare dunque che anche per le vibrazioni flessionali, almeno per ciò che concerne la messa in scala, le lastre curve obbediscono

alle stesse leggi delle lastre piane.

Concludendo si è notato che la condizione molto restrittiva (73), la quale, se verificata, renderebbe coincidenti le condizioni (79) e (80) con le (84) e (85), deriva dal mutuo sovrapporsi di vibrazioni flessionali e longitudinali, e può pertanto venire trascurata ogni qualvolta sia trascurabile uno dei due regimi di vibrazione rispetto all'altro.

2-3-11 - Il problema delle condizioni al contorno.

Lungo il contorno di una lastra curva, scegliendo opportunamente il riferimento e a meno dei fattori A (adimensionali, per cui ininfluenti nella nostra trattazione), è possibile esprimere le condizioni al contorno nei tre casi di vincolo mediante relazioni formalmente analoghe alla (41) per le vibrazioni longitudinali ed alle (47),

(48), (49) e (50) per le vibrazioni flessionali.

Di conseguenza si ottengono le stesse condizioni per la messa in scala, in particolare restano valide la (45) per gli sforzi applicati sul bordo e tangenti alla lastra e le (56), (57) per gli altri tipi di sforzi applicati ai margini. Va notato che in presenza di lati liberi è necessario rispettare la condizione:

$$(58)$$

$$v = \text{cost}$$

questo per motivi analoghi a quelli a suo tempo illustrati.

2-3-12 - Accoppiamento acustico-meccanico.

Riallacciandoci a quanto enunciato nel capitolo 1, possiamo ora considerare il problema glo-

bale di struttura vibrante eccitata dal campo acustico e vedere quali parametri occorre rispettare perché la messa in scala conservi i rapporti quantitativi di influenza fra problema acustico e problema strutturale.

Per giungere ad una quantificazione dell'effetto del contatto fra campo acustico e struttura abbiamo 2 strade:

- 1) Analogamente a quanto si fa nell'acustica classica, si tratta il problema dal punto di vista energetico, considerando per semplicità un'onda piana incidente su una parete pure piana. Imponendo che la frazione di energia passante su quella incidente si mantenga costante nella messa in scala, si può far vedere che è necessario conservare i rapporti:

(86)

$$\frac{\rho_o c_o^2}{\rho_s c_s^2} = \text{cost}$$

$$\frac{h}{L} = \text{cost}$$

nei quali le grandezze $\rho_i c_i^2$ sono proporzionali, come vedremo, alla pressione sonora nel mezzo i .

Ottenendosi 2 condizioni, questo metodo è il più restrittivo.

- 2) Partendo dall'impostazione generale del 1° capitolo, si scrive l'equazione di una lastra vibrante soggetta alla pressione del campo acustico $p(\bar{R}_0, t)$; poi la si adimensionalizza e si giunge a definire la condizione per il rispetto di detta equazione.

Per coerenza con i procedimenti sino ad ora seguiti adottiamo il 2° metodo. L'equazione di vibrazione forzata è poi la (46), nella quale compare p al posto di q :

$$(87)$$

$$\nabla^4 w + \frac{\rho_s \cdot 12 \cdot (1 - \nu^2)}{E_s \cdot h^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -p \cdot \frac{12 \cdot (1 - \nu^2)}{E_s h^3}$$

D'altronde, per la condizione al contorno
(10) del campo acustico, ho:

(88)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \dot{w}$$

Se suppongo che l'onda di pressione acustica
sia piana, posso scrivere:

(89)

$$p(x,t) = p_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{ikx}$$

ove

(90)

$$k = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Inoltre nelle ipotesi usuali di movimento
armonico della parete, posso scrivere:

(91)

$$\dot{w}(t) = \dot{w}_0 \cdot e^{-i\omega t}$$

Sostituendo queste espressioni nella (88),
e ricordando che è:

(92)

$$\omega = 2\pi f$$

ottengo:

(93)

$$p_0 = \rho_0 \cdot \frac{\omega}{k} \dot{w}_0$$

e notando che è:

(94)

$$\frac{\omega}{k} = c_0$$

si ha:

(95)

$$p_o = \rho_o c_o \dot{w}_o$$

Possiamo ora inserire questo valore nella (87) e otteniamo:

(96)

$$\nabla^4 w + \frac{12 \rho_s (1 - \nu^2)}{E_s h^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\rho_o c_o \cdot \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{12(1 - \nu^2)}{E_s h^3}$$

la adimensionalizziamo con le solite posizioni:

(97)

$$w = w^* \cdot L$$

$$t = \frac{t^*}{\omega}$$

$$\nabla^4 = \frac{\nabla^{*4}}{L^4}$$

ed otteniamo:

$$(98)$$

$$\nabla^{*4} w^* + 12 \frac{\rho_s \omega^2 L^4}{E_s h^2} \cdot (1 - \nu^2) \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} = - \frac{\rho_o c_o L^4 \omega}{E_s h^3} (1 - \nu^2) \frac{\partial w^*}{\partial t^*}$$

Da essa ottengo i raggruppamenti adimensionali:

$$(99)$$

$$\frac{\rho_s \omega^2 L^4}{E_s h^2} \cdot (1 - \nu^2) = \text{cost}$$

$$(100)$$

$$\frac{\rho_o c_o L^4 \omega}{E_s h^3} \cdot (1 - \nu^2) = \text{Cost}$$

La (99) coincide con la condizione (54) ricavata nel caso di vibrazioni nel vuoto. Invece la (100) può essere ricondotta alla (55) se ammettiamo che sia sempre soddisfatta la (15):

(101)

$$\frac{\omega L}{c_0} = \text{cost}$$

In questo caso ottengo la condizione equivalente alla (100):

(102)

$$\frac{\rho_0 c_0^2 L^3}{E_S h^3} \cdot (1 - \nu^2) = \text{cost}$$

Essa è analoga alla (55), solo che al posto del termine forzante q compare il termine $\rho_0 c_0^2$ ed in effetti si può dimostrare che la pressione acustica può essere ritenuta proporzionale a questo parametro:

(103)

$$p(x, t) \propto \rho_0 c_0^2$$

è sufficiente ad esempio considerare l'equazione (16), ricavando da essa $\bar{p}$.

Possiamo dunque concludere che per garantire l'accoppiamento acustico fra una lastra piana e un'onda piana è sufficiente la condizione (102); essa può essere trasformata ulteriormente ponendo $E_s = c_s^2 \cdot \rho_s$ ed ottenendo così:

$$(104)$$

$$\frac{\rho_o L^3}{\rho_s h^3} \cdot \frac{c_o^2}{c_s^2} (1 - v^2) = \text{cost}$$

Notiamo infine che la trattazione può essere ripetuta nel caso particolare di lastra curva in regime di membrana ed in questo caso il risultato è diverso; sostituendo infatti nella (80) al parametro q il nuovo valore $\rho_o c_o^2$, si ha:

$$(105)$$

$$\frac{\rho_o c_o^2 L}{Eh} (1 - v^2) = \text{cost}$$

che può essere trasformata nella:

(106)

$$\frac{\rho_o L}{\rho_s h} \frac{c_o^2}{c_s^2} (1-v^2) = \cos$$

Abbiamo dunque ottenuto 2 diverse condizioni di accoppiamento acustico: la (104) è valida per strutture a pareti perfettamente piane, oppure curve, ma nel caso in cui siano trascurabili gli sforzi membranali.

La (106) invece è valida per strutture a guscio ove siano dominanti gli effetti di membrana.

Nel caso generale, di lastre curve in regime misto, con lati liberi, essendo necessario imporre la condizione (73) $h/L = \text{cost}$ ed anche la (58) $v = \text{cost}$, si ha che le condizioni (104) e (106) divengono equipollenti e danno:

(107)

$$\frac{\rho_o c_o^2}{\rho_s c_s^2} = \text{cost}$$

questa è poi la condizione (86), che avremmo ottenuto applicando direttamente il metodo energetico e che appare dunque più restrittiva di quanto sia in generale necessario.

2-4 - UTILIZZAZIONE DELLE CONDIZIONI PER IL PROGETTO E LA PROVA DEI MODELLI

Nella Figura 3 è mostrata una tabella che raccoglie tutte le condizioni che sono state ricavate nel paragrafo precedente.

Un modello che rispettasse tutte le condizioni suddette sarebbe certamente in grado di fornire risultati attendibili, ma sarebbe molto costoso.

Vediamo che possiamo supporre di rispettare

Fig. 3 - Principali parametri adimensionali da mantenere costanti .

ELEMENTO STRUTTURALE		TRAVI	LASTRE PIANE	LASTRE CURVE	MEZZO ACUSTICO
Vibrazioni longitudinali	CONDIZIONE STRUTTURALE	$\frac{\rho_s}{E} \omega^2 L^2$	$\frac{\rho_s}{E} \omega^2 L^2 (1-\nu^2)$	$\frac{\rho_s}{E} \omega^2 L^2 (1-\nu^2) *$	
	CONDIZIONE DI ACCOPPIAMENTO			$\frac{\rho_o L c_o^2}{\rho_s h c_s^2} (1-\nu^2) *$	
	CONDIZIONI AL CONTORNO	$\frac{q' L}{E A}$ $\frac{F}{E A}$	$\frac{q L}{E h} (1-\nu^2)$ $\frac{q'}{E h} (1-\nu^2)$	$\frac{q L}{E h} (1-\nu^2) *$	
Vibrazioni flessionali	CONDIZIONE STRUTTURALE	$\frac{\rho_s A}{EI} \omega^2 L^4$	$\frac{\rho_s \omega^2 L^4 (1-\nu^2)}{E h^2}$	$\frac{\rho_s \omega^2 L^4 (1-\nu^2)}{E h^2} *$	
	CONDIZIONE DI ACCOPPIAMENTO		$\frac{\rho_o L^3 c_o^2}{\rho_s h^3 c_s^2} (1-\nu^2)$	$\frac{\rho_o L^3 c_o^2}{\rho_s h^3 c_s^2} (1-\nu^2) *$	
	CONDIZIONI AL CONTORNO	$\frac{q' L^3}{E I}$ $\frac{F L^2}{E I}$ $\frac{M L}{EI}$	$\frac{c L^3}{E h^3} (1-\nu^2)$ $\nu = \text{cost.} **$	$\frac{c L^3}{E h^3} (1-\nu^2) *$ $\nu = \text{cost.} **$	
Vibrazioni sia flessionali che membranali	CONDIZIONE STRUTTURALE			$\frac{h}{L}$ $\frac{\rho_s \omega^2 L^2 (1-\nu^2)}{E}$	$\frac{\omega L}{c_o}$
	CONDIZIONE DI ACCOPPIAMENTO			$\frac{\rho_o c_o^2}{\rho_s c_s^2} (1-\nu^2)$	
	CONDIZIONI AL CONTORNO			$\frac{q L}{E h} (1-\nu^2)$	$\frac{\rho \omega^2 L^2}{p}$

queste condizioni utilizzando modelli sempre meno somiglianti all'originale, secondo questa sequenza:

- a) modelli con gli stessi materiali e lo stesso mezzo acustico dell'originale;
- b) modelli con materiali diversi ma con lo stesso mezzo acustico dell'originale;
- c) modelli nello stesso materiale ma con mezzo acustico diverso;
- d) modelli in materiale diverso e con mezzo acustico diverso dall'originale.

A rigore non è detto che i modelli tipo a) diano risultati migliori del tipo d): ciascun tipo di questi modelli, se rispetta le condizioni di cui alla Figura 3 è da considerarsi esatto e la scelta di un tipo o dell'altro dipenderà dalle particolari esigenze costruttive, logistiche e di misurazione del problema in esame.

Nel nostro campo, comunque, visto che voglia-

mo studiare essenzialmente fenomeni acustici, sarà pur sempre lecito fare delle approssimazioni e tralasciare di rispettare qualche parametro; certamente però non sarà ammesso non rispettare il parametro fondamentale espresso dalla (15), che garantisce la similitudine del campo acustico, e qualora si decida di variare il mezzo acustico sarà necessario servirsi della (16) per valutare le variazioni di pressione sonora prodotte.

Inoltre sarà da tener presente la condizione (73) $h/L = \text{cost}$ ogni qualvolta ci siano vibrazioni miste di una lastra curva.

2-4-1 - Modelli con gli stessi materiali e stesso mezzo acustico del prototipo.

La costruzione di un modello di questo tipo è conforme alla già citata legge di Newton: infatti il rispetto della condizione (15) produce automaticamente, essendo c_0 costante, il rispetto del-

la scala dei tempi. Inoltre, anche se la condizione (73) $h/L = \text{cost}$, non fosse necessaria autonomamente, noi la dovremmo rispettare comunque, poiché essa discende dalle altre se in queste rendiamo costanti gli altri parametri: ad esempio, nella (84) essendo costanti ρ , E , ν e tenendo presente la (15), si ricava:

(108)

$$\frac{L^2}{h^2} = \text{cost}$$

Dunque questi modelli sono sempre in scala geometrica e "temporale" esatta. In conseguenza di ciò, tutte le grandezze finiranno in scale dipendenti solo dalle rispettive dimensioni fisiche, e la realizzazione di un modello in scala, ad esempio 1:5, comporta l'ottenimento di

- spessore ridotto ad 1/5;
- frequenze quintuplicate;
- ampiezza dei movimenti ridotta ad 1/5;

- velocità dei punti invariata;
- pressione sonora invariata;
- masse ridotte ad $1/125$;
- accelerazione dei punti quintuplicate;
- forze ridotte ad $1/125$;
- mobilità aumentata di 25 volte;
- funzione di trasferimento aumentata di 125 volte;
- funzione di Green aumentata di 25 volte;
- funzione di risposta in frequenza aumentata di 25 volte.

A parte la difficoltà tecnica di realizzare un modello di questo tipo, non è detto che le prestazioni da esso fornite siano ottimali: infatti, per forti riduzioni di scala, occorre estendere il campo di frequenza fino a valori poco usuali, ove le misure sono difficili e gli strumenti imprecisi.

Anche la riduzione delle forze ad $1/25$ comporta dei problemi, poiché è molto difficile dosare dei piccoli impulsi.

Positiva invece è la caratteristica di non dare variazioni del livello di pressione sonora misurato, nonché di dare accelerazioni ai punti della struttura quintuplicate, per cui gli accelerometri non hanno problemi di sensibilità, anzi spesso si cadrà nel problema opposto, di sovraccaricare la linea di amplificazione per le misure.

La realizzazione di modelli "newtoniani" appare riservata, per questi motivi, alla soluzione di problemi molto complessi, con interazioni fra fenomeni di vario tipo, ed in condizioni tali da rendere necessario rispettare le equazioni generali dei fenomeni, non quelle ridotte grazie alla trascurabilità di certe grandezze.

Se ad esempio dobbiamo studiare una struttura a guscio in regime misto flessionale-membranale, dobbiamo per forza rispettare il parametro h/L ; inoltre dalla (15) abbiamo:

(109)

$$\omega \cdot L = c_0$$

e con essa la (75) dà:

(110)

$$\frac{c_0^2}{c_s^2} (1 - v^2) = \text{cost}$$

infine la condizione di accoppiamento acustico (107), tenendo conto della (110) dà:

(111)

$$\frac{\rho_0}{\rho_s} = \text{cost}$$

Per soddisfare contemporaneamente le condizioni (110) e (111) è quasi obbligatorio costruire un modello con gli stessi materiali e lo stesso mezzo acustico del prototipo; sarebbe infatti mol-

to difficile, volendo ugualmente costruire un modello non newtoniano, trovare un materiale strutturale e un mezzo acustico che consentono di rispettare entrambe le condizioni.

Ecco che in casi come questo il modello newtoniano è sempre la soluzione più semplice e più economica.

2-4-2 - Modelli con materiali diversi ma con lo stesso mezzo acustico del prototipo.

Supponiamo di dover realizzare il modello in scala di una di quelle strutture per cui non è necessario imporre in assoluto la condizione (73) $h/L = \text{cost.}$ Per semplicità operativa però vogliamo mantenere lo stesso mezzo acustico del prototipo; dunque dalla (15), essendo c_0 costante, otteniamo la necessità di rispettare la scala temporale.

Possiamo allora pensare di abbandonare la

ferrea legge newtoniana (che comunque andrebbe sempre bene) e decidiamo di costruire il modello in un materiale diverso da quello originale.

La sostituzione del materiale non consente purtroppo, in generale, di soddisfare tutte le condizioni, a meno che noi facciamo variare anche altri parametri; ad esempio, imponiamo un rapporto h/L diverso da quello del prototipo.

Il problema, da risolversi per tentativi, è dunque quello di trovare uno spessore commerciale (dal momento che le lastre ed i profilati vengono venduti in misure ben definite) che consenta, per il materiale scelto, di rendere quanto più possibile soddisfatte le condizioni di similitudine richieste.

Va notato che, anche se fosse possibile scegliere lo spessore con ogni libertà, non è detto che si riesca sempre a soddisfare contemporaneamente la condizione "strutturale" - tipo la (54)

per intenderci - e la condizione di accoppiamento acustico - tipo la (104) -. Perché ciò avvenga in buona misura occorre avere scelto un materiale con caratteristiche opportune: possiamo dunque affermare che non è vero che ci sia completa libertà di scelta del materiale.

Va anche detto, però, che in determinati problemi è possibile scegliere fra le condizioni (54) e (104) la più importante e trascurare l'altra: se ad esempio interessa studiare il campo acustico prodotto da sollecitazioni meccaniche della struttura, sarà ovviamente molto più importante rispettare la condizione strutturale - tipo la (54) - che quella di accoppiamento, dunque il campo acustico non viene considerato capace di modificare significativamente il regime vibrazionale della struttura nel vuoto.

Per valutare la fattibilità di un modello di questo tipo, è stato realizzato un esperimento

che pone a confronto un modello in scala 1:5 in Plexiglass e Al con un prototipo in acciaio e vetro, entrambi immersi in aria, e che verrà illustrato nel 3° Capitolo.

2-4-3 - Modelli con gli stessi materiali ma diverso mezzo acustico del prototipo.

In alcuni casi il rispetto della condizione (15) $\omega L/c_0 = \text{cost}$ (che come abbiamo visto è indiscutibile) appare problematico in caso di rapporti di scala molto piccoli.

Se infatti manteniamo lo stesso mezzo acustico, c_0 è costante, per cui la frequenza cresce in modo inversamente proporzionale alla dimensione del modello. Le misure alle alte frequenze sono sempre difficoltose, per cui può apparire conveniente ridurre l'estensione del campo di frequenze adottando un mezzo acustico nel quale la velocità del suono sia più bassa che nell'aria.

Se al limite, riducendo il modello in scala 1:5, trovassimo un gas nel quale la velocità del suono è $1/5$ di quella dell'aria, potremmo effettuare le misure in un campo di frequenze coincidente con quello dell'originale. In questo modo adotteremo dunque una scala temporale falsata.

Il rispetto delle altre 2 condizioni, strutturale ed accoppiamento, è possibile solo sotto certe ipotesi: in particolare deve essere possibile variare il parametro h/L .

Infatti dalla (54), ad esempio, tenendo conto della (15) si ha:

(112)

$$\frac{L^*}{h^*} \cdot \frac{c_o^2}{c_s^2} \cdot (1-v^2) = \text{cost}$$

Siccome c_o^2 varia mentre c_s e v sono costanti, perché il numero puro mantenga lo stesso valore saremo costretti a variare il rapporto h/L ; questi

modelli dunque non possono essere applicati allo studio di lastre curve in regime misto.

Inoltre il rispetto della condizione di accoppiamento, ad esempio la (104), tenendo conto della (112), dà:

(113)

$$\frac{\rho_o c_s}{\rho_s c_o} = \text{cost}$$

e, dunque, essendo costanti ρ_s e c_s , occorre adottare un gas tale che

(114)

$$\frac{\rho_{\text{gas}}}{c_{\text{gas}}} = \frac{\rho_{\text{aria}}}{c_{\text{aria}}}$$

Trovare un gas con questa caratteristica è difficile, per cui praticamente la realizzazione di questi modelli è attuabile solo quando, in ana-

logia con il paragrafo precedente, è possibile trascurare il rispetto della condizione di accoppiamento.

Tuttavia in certi casi, quando cioè il termine forzante sia rappresentato da un campo acustico esterno e non da sollecitazioni strutturali, il rispetto della (112) può essere abbandonato ed in questo caso possiamo rispettare $l'h/L = \text{cost.}$

Sempre in questa ipotesi, la condizione di accoppiamento (106) dà:

$$(115)$$

$$\frac{\rho_o c_o}{\rho_s c_s} = \text{cost}$$

da cui si evince che, essendo costanti ρ_s e c_s , deve restare lo stesso, fra aria e gas, il parametro $\rho_o c_o^2$, che altro non è poi che il modulo elastico E_o del mezzo acustico essendo $c_o^2 = \frac{E_o}{\rho_o}$.

Ecco dunque un altro caso in cui questi modelli sono attuabili, sempre però sotto certe ipotesi restrittive.

2-4-4 - Modelli in materiali diversi e con mezzo acustico diverso dal prototipo.

Questo è il caso più generale, nel quale possiamo giocare su molti parametri per mandare a posto le condizioni di progetto, pur potendo imporre come dati in ingresso i parametri che più ci fanno comodo.

Torniamo per un attimo a considerare l'esempio fatto al paragrafo 2-4-1, riguardante una struttura a guscio che necessitava del rispetto della scala geometrica ($h/L = \text{cost}$).

In questo caso, scegliendo opportunamente il mezzo acustico in funzione del materiale che abbiamo prescelto, potremo sempre soddisfare le condizioni (110) e (111); in particolare da esse

si ricava che questo mezzo acustico dovrà avere queste caratteristiche:

(116)

$$c_{o\text{m.ac.}}^2 = \frac{c_{sm}^2}{1-v_m^2} \cdot \frac{1-v_p^2}{c_{sp}^2} \cdot c_{op}^2$$

(117)

$$\rho_{o\text{m.ac.}} = \frac{\rho_{sm} (1-v_m^2)}{\rho_{sp} (1-v_p^2)} \cdot \rho_{op}$$

nelle quali sono state indicate con i pedici p e m le grandezze relative a prototipo e modello.

Scelto il materiale per il modello, dalle due equazioni (116) e (117) si ricavano dunque i parametri caratteristici del gas che dobbiamo procurarci; spesso inoltre è possibile considerare la sola condizione (116), quando il campo acustico sia prodotto da sollecitazione meccanica della struttura.

Se poi siamo nel caso in cui non occorre rispettare la condizione $h/L = \text{cost}$, allora possiamo ad esempio permetterci di prefissare sia il materiale che il gas ed andare poi a cercare lo spessore h che renda vere il più possibile le condizioni di similitudine.

2-4-5 - Il problema delle azioni forzanti e delle forze in generale.

Finché si sollecita il modello con una sola forza ed il modello stesso è costituito da un'unica struttura, le condizioni del tipo (44), (45) o (55), (56) consentono di mettere in scala la particolare azione sollecitante secondo la particolare condizione di quella struttura.

Se però il modello è costituito da più strutture, sollecitate dall'esterno e/o sollecitantesi fra loro, sarebbe necessario ovviamente che il fattore di scala per le forze fosse lo stesso per

tutte le strutture di cui il modello è composto.

Ciò in generale si verifica solo per i modelli newtoniani, negli altri la condizione può risultare rispettata solo in casi fortuiti. Dunque accade che le varie strutture di cui il modello è costituito concorrono in maniera differente, rispetto al prototipo, a produrre le caratteristiche meccanico-acustiche del sistema.

Può dunque accadere che particolari elementi strutturali si trovino ad essere, in proporzione al prototipo, molto più sollecitati, e dunque contribuiscono in modo predominante al comportamento del complesso. E' pur sempre possibile, però, valutare l'influenza relativa di ciascun elemento strutturale tramite le condizioni (44), (45), (55), ecc.: se infatti abbiamo un modello in scala 1:5 nel quale per la gran parte delle strutture si ha $F_m/F_p = 1/25$, ed accade che una particolare struttura, mettiamo una lastra, si venga a trovare

in condizioni tali per cui è $F_m/F_p = 1/1000$, è evidente che essa, soggetta ad una forza unitaria, reagirà molto più ampiamente che le altre strutture; dunque se essa è sede di un modo proprio di vibrazione a 100 Hz, noi troveremo una forte risonanza strutturale su questa frequenza, dovuta in gran parte a quel solo elemento strutturale.

Siccome però lo scopo di questi esperimenti è solitamente quello di individuare non le intensità delle risonanze (per altro molto influenzate anche da fattori di perdita, attriti nei vincoli, ecc.) quanto i valori di frequenza a cui esse si verificano, appare chiaro che, purché non esistano divari enormi fra i rapporti di riduzione delle forze, è possibile valersi di modelli in scala che non rispettino appieno la condizione di uniformità degli sforzi.

2-4-6 - Conclusioni.

Si è visto in questo sottoparagrafo quali possibilità esistono nel costruire modelli in scala acustico-meccanici.

Dei quattro tipi di modelli individuati, il primo, apparentemente più semplice da progettare, risulta poi costoso e di difficile realizzazione; il secondo tipo si presta bene allo studio di strutture sollecitate solo meccanicamente o solo acusticamente, mentre in generale non è possibile realizzare modelli di questo tipo che soddisfino entrambi gli scopi; il terzo tipo unisce gli svantaggi del primo alla necessità di cambiare gas: tuttavia possiamo pensare che questo tipo di modelli venga utile quando, avendo già realizzato un modello del primo tipo, e volendo estendere le misure ad elevati valori di frequenza, sia impossibile con la strumentazione a disposizione continuare a lavorare in aria.

Infine il quarto tipo di modelli, che consentirebbe di scegliere come vogliamo i rapporti di riduzione degli spessori e delle frequenze, presenta l'unico grosso inconveniente di necessitare di ambienti particolarmente attrezzati per la manipolazione di gas diverso dell'aria.

Capitolo III

LAVORO SPERIMENTALE

Questa fase di lavoro è servita a confrontare un modello in scala con un prototipo reale.

La scelta dell'oggetto da riprodurre è stata quasi obbligata, poiché abbiamo dovuto scegliere la cabina di un veicolo del quale fosse disponibile un prototipo in laboratorio, per le misure. Siccome era disponibile una cabina da trattore FIAT modello 52-C, ci siamo senz'altro orientati su di essa (vedi Foto 1).

3-1 - DESCRIZIONE DEL PROTOTIPO

Prima di iniziare la costruzione del modello, ci siamo procurati presso la FIAT-Trattori di Modena numerosi disegni relativi alla cabina di si-

Foto 1



curezza, alla piastra di appoggio e ad altri particolari strutturali ad essi connessi.

Inoltre abbiamo eseguito alcune fotografie Polaroid (Foto n. 3, 4, 5, 6) onde poter connettere correttamente le varie parti.

In base ai disegni e all'esame visivo, la cabina è risultata costituita di 5 parti (vedi Fig. 4):

- a) piastra di fondo;
- b) parafango sinistro;
- c) parafango destro;
- d) paratia posteriore;
- e) cabina vetrata (asportabile).

Le prime quattro parti sono costituite da piastre in acciaio, spesse generalmente 2 mm., stampate a caldo in modo da assumere particolari nervature ed irrigidimenti.

In molti punti sono sovrapposte saldate più piastre, in modo da ottenere vere e proprie scato-

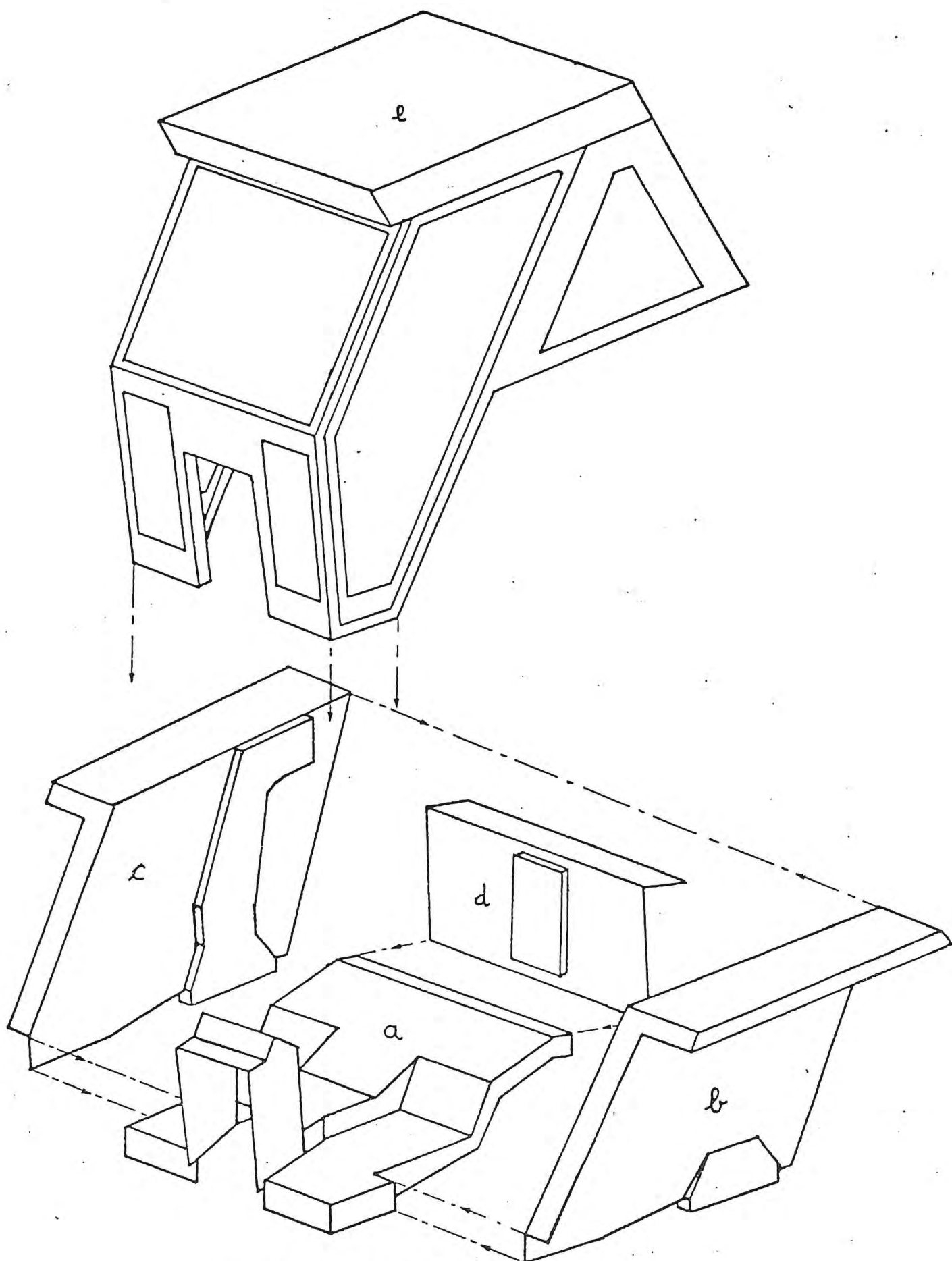
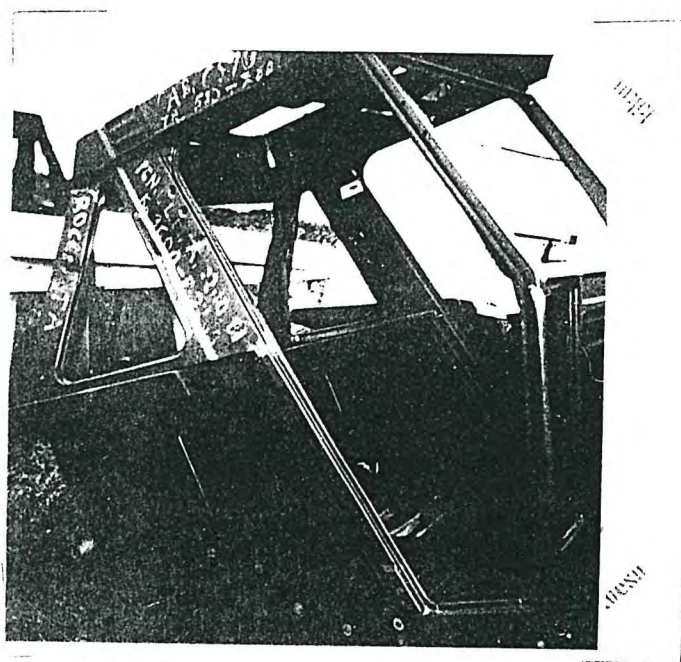


Fig. 4 - Schema costitutivo della cabina di sicurezza .

Foto 2



lature.

Particolarmente interessante è la piastra inferiore: essa è fortemente sagomata e reca connesso anteriormente il cofano posteriore del motore, fissato mediante bulloni e strutturalmente separato dalle altre cofanature del motore stesso. Inoltre sotto ad esso, anteriormente, vi sono ai due lati gli attacchi di supporto per la sospensione della cabina (vedi Foto 4), costituiti da scatolature in lamiera spesse 3 mm. e rinforzate attorno ai fori di fissaggio dei silent-blocks.

Altri 2 supporti si trovano invece alla base dei parafranghi e sono costituiti da una scatolatura che prosegue, in 2 montanti, per l'intera altezza del parafrango stesso, all'interno della cabina. Anche questi 2 supporti collegano la cabina al trattore mediante grossi silent-blocks.

Le 4 parti a, b, c, d, sono saldamente fissate fra loro mediante una fitta bullonatura, cosicché l'insieme di queste 4 parti può ritenersi mo-

Foto 3

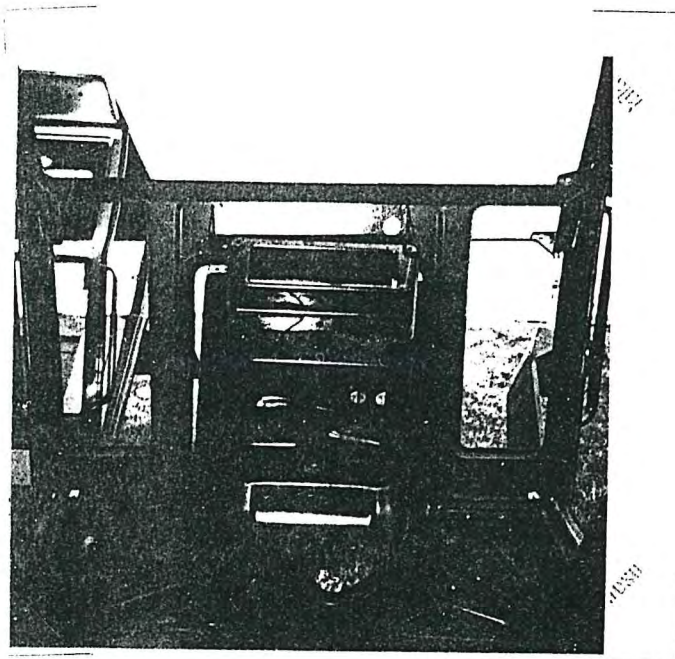
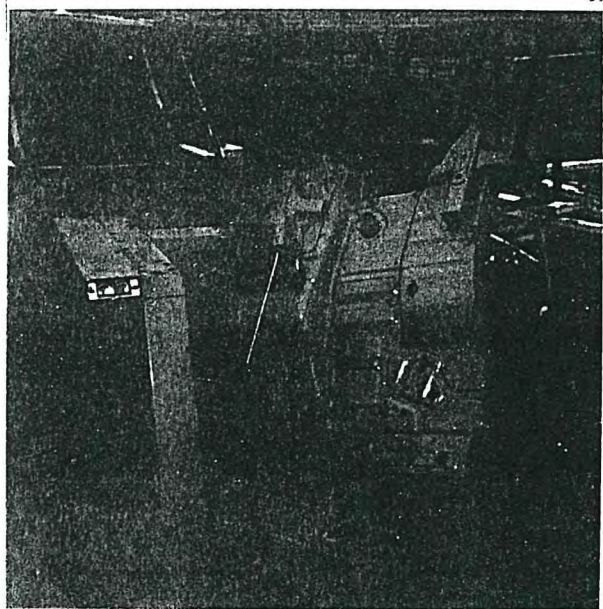


Foto 4



nolitico.

Sopra a questa struttura viene fissata, mediante bulloni, con interposizione di una guarnizione elastica in neoprene, la cabina a vetri. Il fissaggio è molto meno continuo di quello precedente e la parte superiore risulta così, almeno in parte, distinta da quella inferiore.

La cabina a vetri è un optional che la FIAT offre agli acquirenti, ma le sue funzioni sono molte e tutte importanti:

- a) sicurezza;
- b) protezione dagli agenti esterni;
- c) climatizzazione.

a) Sicurezza.

La cabina è costituita da un telaio in acciaio scatolato, fatto di longheroni dalla sezione contorta, ma di elevato momento di inerzia, in grado di evitare, in caso di ribaltamento del

trattore, lo schiacciamento del guidatore.

Riguardo a ciò abbiamo potuto osservare un prototipo che era stato sottoposto a prove di ribaltamento (vedi Foto 5) e che, sebbene un pò ammaccato, non aveva ceduto.

b) Protezione dagli agenti esterni.

L'intera cabina, se tutti i vetri sono chiusi, è a tenuta d'aria ed il ricambio della medesima avviene tramite un ventilatore che aspira aria esterna attraverso un pacco di filtri situato nel tettuccio. Ciò garantisce una grande sicurezza per l'operatore nel caso di trattamenti anticrittogamici ed antiparassitari a nebbia. Chiaramente in questi casi occorre poi provvedere alla sostituzione dei filtri, ma l'operazione è agevole, poiché il tettuccio è dotato di un cofano superiore apribile.

Foto 5



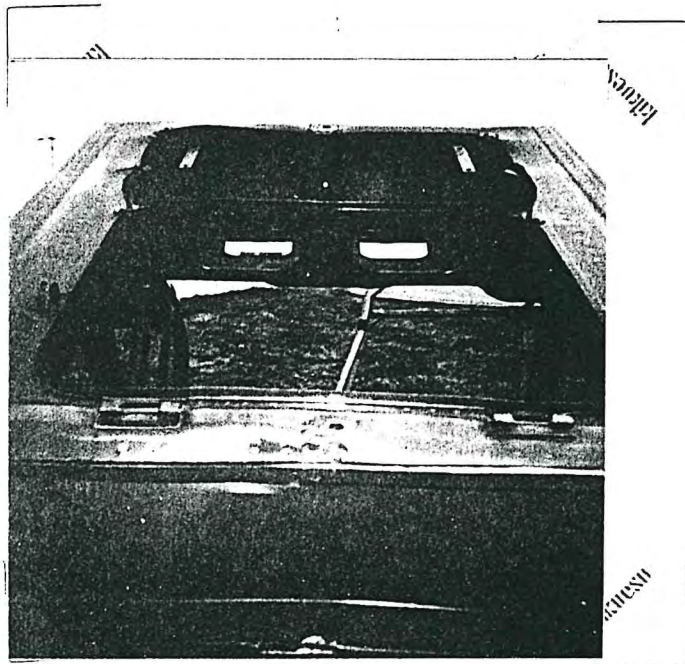
c) Climatizzazione.

Sempre all'interno del tettuccio è installato un piccolo radiatore per il riscaldamento invernale. Durante la stagione estiva è possibile aprire il tettuccio, il vetro posteriore ed asportare le portiere, oppure si può installare un impianto di condizionamento dell'aria. Comunque, volendo, è possibile smontare in breve tempo la cabina a vetri ed il trattore riassume l'aspetto consueto.

Tutti i vetri, spessi 6 mm., sono montati tramite guarnizioni in gomma a doppia scanalatura: in una si inserisce il vetro, nell'altra un lembo di lamiera sporgente dai longheroni scatolati adiacenti.

Il tetto è poi costituito da un'unica struttura scatolata, estremamente rigida e monolitica, che presenta le 2 aperture del tettuccio apribile (posteriore) e del coperchio del vano climatizzazione (anteriore), (vedi Foto 6).

Foto 6



Come si è visto la prima idea di una struttura generalmente costituita di superfici piane può essere parecchio fallace.

Il comportamento meccanico della struttura è dovuto in gran parte alla presenza di longheroni a sezione multipla e scatolature, a parte ovviamente le parti vetrate che sono vere e proprie lastre piane.

Tuttavia, riguardo al regime vibrazionale, anche le parti scatolate si comportano come lastre piane, finché almeno le lunghezze d'onda flessionali sono parecchio diverse dalle dimensioni della scatola stessa.

L'intera struttura misura globalmente circa mm.1724 (lunghezza) x 1915 (larghezza) x 1755 (altezza).

3-2 - SCELTA DEL TIPO DI MODELLO

Per prima cosa va premesso, che, per esigenze di trasportabilità e maneggevolezza, abbiamo scelto di adottare una scala 1:5; ciò ci ha permesso di avere un oggetto abbastanza piccolo ma di dimensioni ancora sufficienti ad evitare che le masse ed i volumi degli strumenti di misura da collocare su di esso fossero tali da alterare fortemente il suo comportamento.

A questo punto la possibilità di realizzare un modello newtoniano mostra tutti i suoi limiti: avremmo infatti dovuto realizzare le parti in lamiera con dell'acciaio spesso $2/5 = 0,4$ mm., i vetri con lastrine spesso 1,2 mm., e dunque ci saremmo trovati con una struttura di difficile realizzazione, di ancor più difficile assemblaggio (non è certo possibile saldare lamierini così sottili) e di costo proibitivo.

In analogia con quanto viene fatto da tempo

per studi puramente meccanici delle strutture, ci siamo orientati verso l'uso di materiali acrilici, in particolare di Plexiglass (o Perspex), che permette di lavorare con spessori maggiori e di effettuare incollaggi strutturali con resine acriliche tali da ripristinare effettivamente la continuità materiale [12].

Inoltre il Plexiglass ha altri 2 grossi vantaggi: è molto lavorabile, poiché può essere tagliato con il seghetto da ferro, con una lama, può essere piegato a caldo, può essere rifinito con la lima o con la mola, può essere bucato con facilità, ecc.; oltre a ciò, è trasparente, dunque permette la completa accessibilità visiva a tutte le parti, consente di controllare la perfezione dell'incollaggio e l'assenza di bolle (vedi Foto 7).

Per meglio valutare le differenze fra le caratteristiche di alcuni materiali strutturali,

abbiamo compilato la tabella riportata in Fig. 5. Questi dati ci serviranno poi per controllare il rispetto delle condizioni di progetto di cui alla Fig. 3.

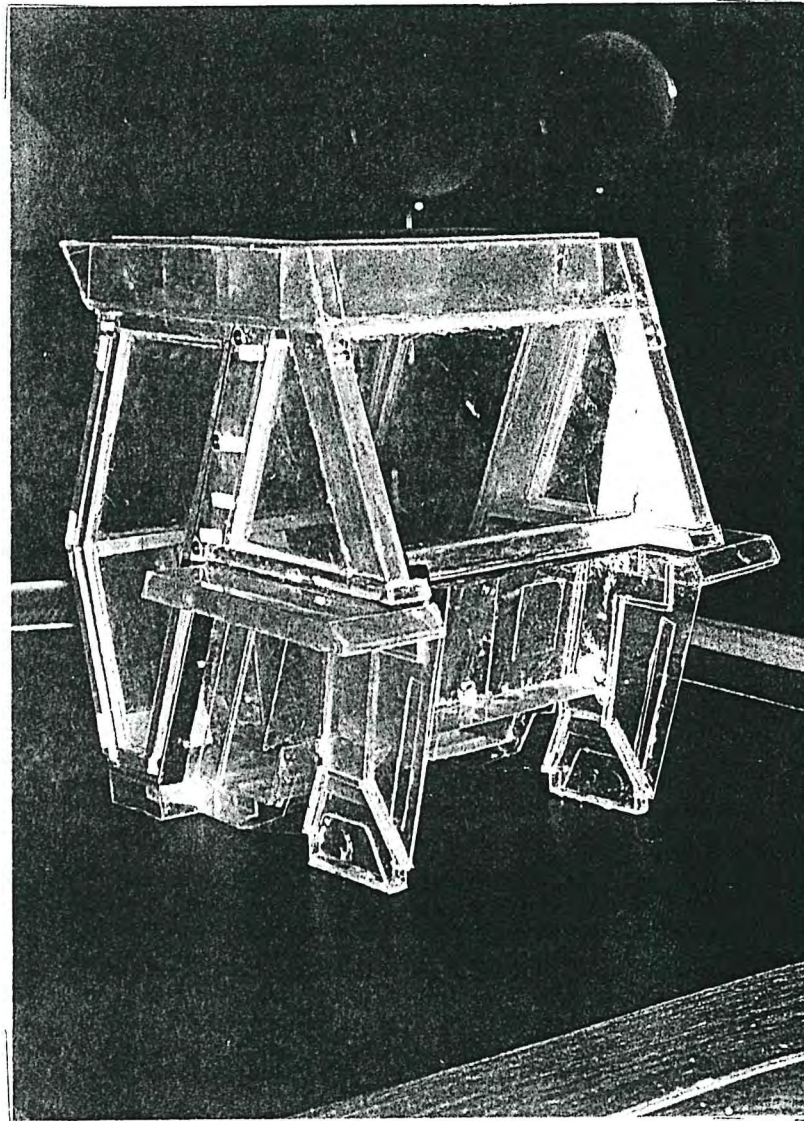
Resta da stabilire se effettuare le misure in aria oppure no; per far ciò occorre avere un'idea del campo di frequenze che vogliamo investigare.

Solitamente sui prototipi dei veicoli vengono prese in considerazione, per lo studio dei campi acustici prodotti all'interno della cabina, le frequenze da 0 a 800 Hz.; ciò significa che, sul modello, avremmo dovuto estendere le misure in aria fino a 4.000 Hz., che è un valore perfettamente accettabile per qualunque tipo di strumentazione. Nel nostro caso dunque non c'è alcun bisogno di sostituire il mezzo acustico, e così abbiamo anche il vantaggio di mantenere invariata la pressione sonora nel modello rispetto al proto-

Fig. 5 - Proprietà fisiche di alcuni materiali strutturali .

MATERIALE		DENSITA'	MODULO DI ELASTICITA'	VELOCITA' DEL SUONO	MODULO DI POISSON	FATTORE DI PERDITA
		$\rho_s \text{ [Kg/m}^3\text{]}$	$E \text{ [N/m}^2\text{]}$	$c \text{ [m/s]}$	ν	ϵ
PROTOTIPO	ACCIAIO	7850	$2 \cdot 10^{11}$	5050	0.28	$10^{-4} \div 10^{-2}$
	VETRO	2500	$67.6 \cdot 10^9$	5200	0.22	$10^{-3} \div 10^{-2}$
MODELLO	PERSPEX	1173	$4.83 \cdot 10^9$	2030	0.38	$5 \cdot 10^{-2}$
	ALLUMINIO	2700	$7.2 \cdot 10^{10}$	5150	0.34	$10^{-4} \div 10^{-2}$

Foto 7



tipo.

In base a queste scelte costruiremo quindi un modello del 2° tipo, quali quelli descritti nel paragrafo 2-4-2.

3-3 - SCELTA DEL TIPO DI MISURE DA ESEGUIRE SU PROTOTIPO E MODELLO

Questa scelta deve precedere il progetto del modello stesso, poiché, come abbiamo visto, è possibile costruire modelli adatti alle particolari misure che si intende eseguire.

In genere, sui prototipi di queste strutture, si eseguono 2 tipi di analisi:

- a) Calcolo delle funzioni di risposta in frequenza e delle funzioni di trasferimento, basandosi su misure sperimentali ottenute percuotendo la struttura in vari punti e rilevando segnali su punti della struttura (con accelerometri)

e in punti della cavità (con microfoni, collocati per lo più nella posizione ove si troverà l'orecchio del guidatore); i segnali ottenuti (dalla cella di forza del martello che percuote, dagli accelerometri e dai microfoni) vengono poi passati ad un analizzatore di Fourier e gli spettri in frequenza così ottenuti, rapportati allo spettro della forza in ingresso, ottenuto dal martello, costituiscono già i diagrammi della funzione di trasferimento e della funzione di risposta in frequenza. In essi le fasi sono ovviamente misurate rispetto alla fase del segnale sollecitante, cioè della forza applicata dal martello.

- b) Eccitando la cavità con un piccolo altoparlante, emettente toni puri, è possibile ricavare un diagramma di "colorazione del suono", prodotto dalla cavità, che permette dunque di studiare le frequenze proprie della cavità stessa. Per strutture di questo tipo, le frequenze pro-

prie della cavità sono in genere molto prossime a quelle ottenute nel caso teorico di pareti infinitamente rigide. In queste misure è anche possibile misurare l'accelerazione di punti della struttura ed ottenere così l'inverso della funzione di risposta in frequenza.

Abbiamo deciso di dare la maggior importanza alle misure tipo a) e questo poiché da esse si ricavano le informazioni più interessanti sull'influenza delle varie parti della struttura nella creazione del campo acustico interno e poiché dalle misure della funzione di trasferimento è possibile ottenere, mediante l'analisi modale, il confronto diretto fra il comportamento della struttura vera e di quella in scala.

Pertanto, essendo nel caso in cui si sollecita esternamente la struttura e non la cavità, diviene più importante il rispetto delle condizioni strutturali che quello delle condizioni di accop-

piamento acustico.

Volendo poi eseguire alcune misure del tipo b), abbiamo pensato di usare lo stesso modello, mettendolo però in condizioni di pareti rigide mediante l'affossamento in una cassa di sabbia e confrontandolo poi con il comportamento del modello con le pareti libere di vibrare, in aria.

Tuttavia è opportuno ricordare che, sebbene la condizione di accoppiamento acustico possa non venire rispettata, bisogna controllare che i materiali scelti siano tali da rendere non eccessivo il divario fra le caratteristiche di accoppiamento del modello e del prototipo.

3-4 - VERIFICA DEL TIPO DI MATERIALE USATO E SCELTA DEGLI SPESSORI

Come abbiamo visto, la struttura del prototipo è costituita di montanti, piastre, scatolature e vetri. Abbiamo anche deciso di poter considerare

le scatolature con gli stessi criteri di modellazione delle piastre, visto il campo di frequenze in esame.

Vediamo dunque se è possibile soddisfare le varie condizioni di progetto, per questi elementi strutturali, e quali rapporti di riduzione delle forze otteniamo per ciascuno di essi.

3-4-1 - Montanti.

I montanti debbono soddisfare a queste condizioni, come si può ricavare dalla Fig. 3:

(1)
CONDIZIONE ACUSTICA

$$\frac{\omega L}{c_o} = \text{cost}$$

(2)
CONDIZIONE STRUTTURALE PER LE VIBRAZIONI LONGITUDINALI

$$\frac{\omega^2 L^2 \rho_s}{E}$$

(3)
CONDIZIONE DI VIBRAZIONE FORZATA LONGITUDINALE

$$\frac{q' \cdot L}{EA} = \text{cost}$$

(4)
CONDIZIONE STRUTTURALE PER LE VIBRAZIONI FLESSIONALI

$$\frac{\omega^2 L^4 \rho_s}{E r^2} = \text{cost}$$

(5)
CONDIZIONE DI VIBRAZIONE FORZATA FLESSIONALE

$$\frac{q' L^3}{EI} = \text{cost}$$

Tutti i montanti possono essere considerati incastrati alle estremità, per cui non compaiono condizioni al contorno.

Dalla (1) essendo il mezzo acustico sempre aria, ricavo:

(6)

$$[\omega L]_p = [\omega L]_m = \text{cost}$$

per cui la condizione (2) dà:

(7)

$$\left[\frac{\rho_s}{E}\right]_p = \left[\frac{\rho_s}{E}\right]_m = \text{cost}$$

ma essendo

(8)

$$c_s = \sqrt{\frac{E}{\rho_s}}$$

ottengo che deve rimanere la stessa la velocità del suono nel modello e nel prototipo.

Questo risultato è molto restrittivo, poiché ci impone di non usare il Plexiglass per i montanti; peraltro la condizione (2) va certamente rispettata: si pensi ai moti rigidi del tetto, in su e in giù, che sono resi possibili appunto dalla vibrazione longitudinale dei montanti che lo sostengono.

Non potendo usare il Perspex abbiamo ripiegato allora sull'alluminio che, come si vede dalla Fig. 5, ha circa la stessa velocità del suono strutturale dell'acciaio.

Chiaramente verranno realizzati in alluminio solo quei montanti che possono dar luogo, per vibrazione longitudinale, ad efficace radiazione acustica.

Consideriamo ora la condizione (4); essa, tenendo presenti la (6) e la (7), fornisce semplicemente:

$$(9) \quad \left[\frac{L}{r} \right]_m = \left[\frac{L}{r} \right]_p = \text{cost}$$

cioè andranno messi in scala i raggi d'inerzia.

Vista la (9), le condizioni sui termini forzanti (3) e (5) divengono equipollenti.

3-4-2 - Scelta dei profilati in alluminio per i montanti.

Abbiamo visto al paragrafo precedente che occorre mettere in scala i raggi d'inerzia.

Occorre dunque anzitutto scegliere 2 assi di riferimento, rispetto ai quali valutare i raggi stessi e poi imporre il rispetto della condizione detta. In generale i montanti sono collocati in adiacenza a lastre piane (vetri); per esigenze di montaggio, è opportuno ottenere dal calcolo profilati i cui lati sono paralleli al piano dei vetri, per cui abbiamo scelto di effettuare il calcolo dei raggi d'inerzia rispetto a 2 assi, n e q , dei quali il primo giace nel piano dei vetri e l'altro è ad esso normale.

Chiaramente questi 2 assi non saranno centra-

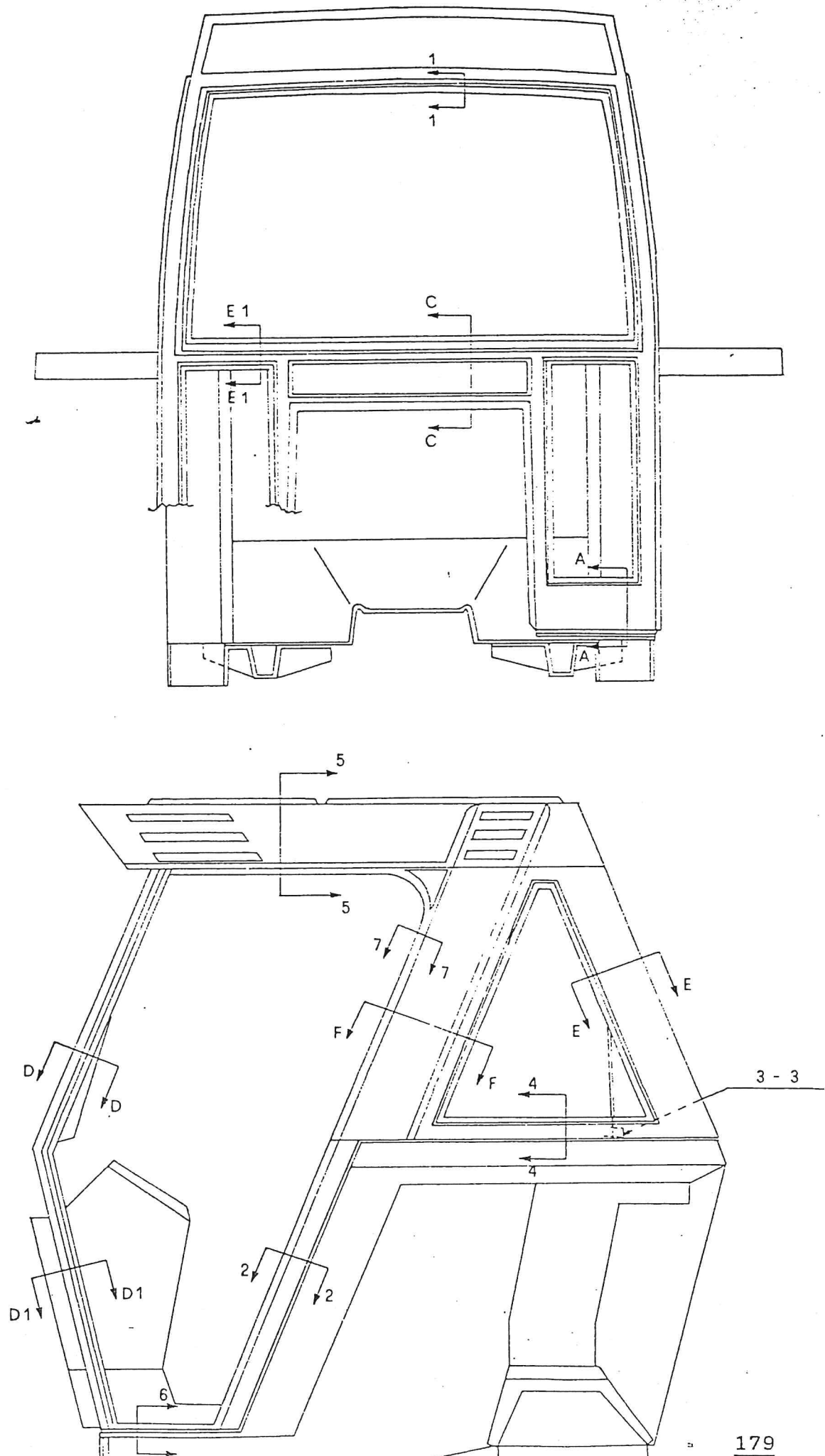
li d'inerzia per i montanti reali mentre lo saranno per i montanti del modello. Ciò significa aver trascurato il momento centrifugo rispetto ad i momenti d'inerzia, il che è lecito solo se i 2 momenti d'inerzia sono fra loro confrontabili.

Fortunatamente, ove ciò non accade, siamo in presenza di montanti i cui assi centrali d'inerzia coincidono quasi perfettamente con gli assi n e q da noi scelti.

In base a quanto detto nel precedente paragrafo, dobbiamo scegliere quali parti della struttura sono da considerare "montanti": in Fig. 6 è illustrata la collocazione delle sezioni che abbiamo deciso di realizzare con profilati di alluminio; come si vede, si tratta di sezioni di elementi strutturali che sostengono il tetto, o che collegano pareti opposte.

Dai disegni fornitici dalla FIAT è stato facile ottenere la forma delle sezioni scatolari dei montanti indicati.

Fig. 6 - Principali sezioni dei montanti .



Nelle Figure 7, 8, 9, 10, 11 sono illustrate alcune di queste sezioni, confrontate con quelle poi effettivamente scelte per il modello.

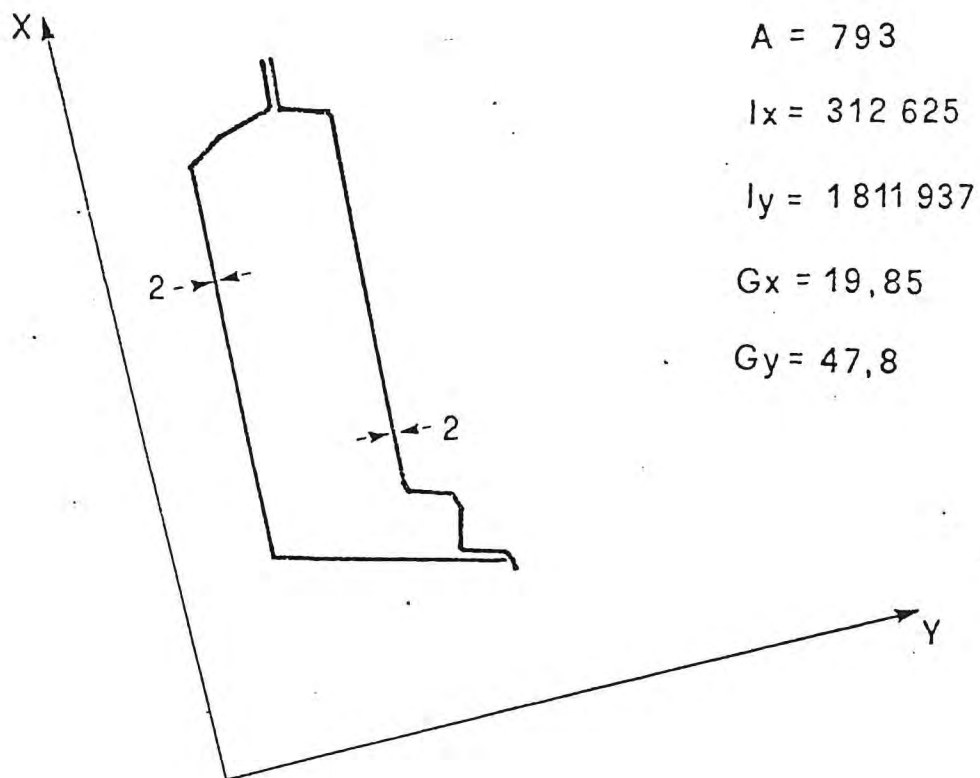
In queste pagine gli assi n e q sono indicati impropriamente con x ed y .

3-4-2-1 - Calcolo delle caratteristiche inerziali delle sezioni del prototipo.

Il calcolo è stato effettuato tramite il programma Fortran denominato "AREE" [4]: è un programma di uso generale che permette il calcolo di sezioni sia in parete sottile (come le nostre) che in parete piena e fornisce per ciascuna di esse:

- Area A della sezione;
- Momenti statici S_x , S_y della sezione rispetto al riferimento "di comodo" (x, y) scelto;
- Coordinate del baricentro X_G e Y_G rispetto allo stesso riferimento;

SECTION A-A SCALE 1:2



$$A = 793$$

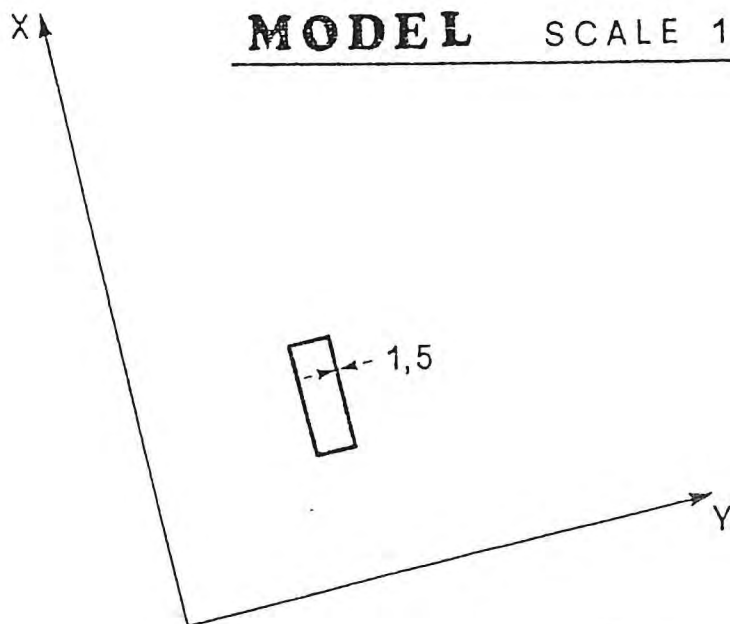
$$I_x = 312\,625$$

$$I_y = 1811\,937$$

$$G_x = 19,85$$

$$G_y = 47,8$$

MODEL SCALE 1:2



$$A = 111$$

$$I_x = 1624,8$$

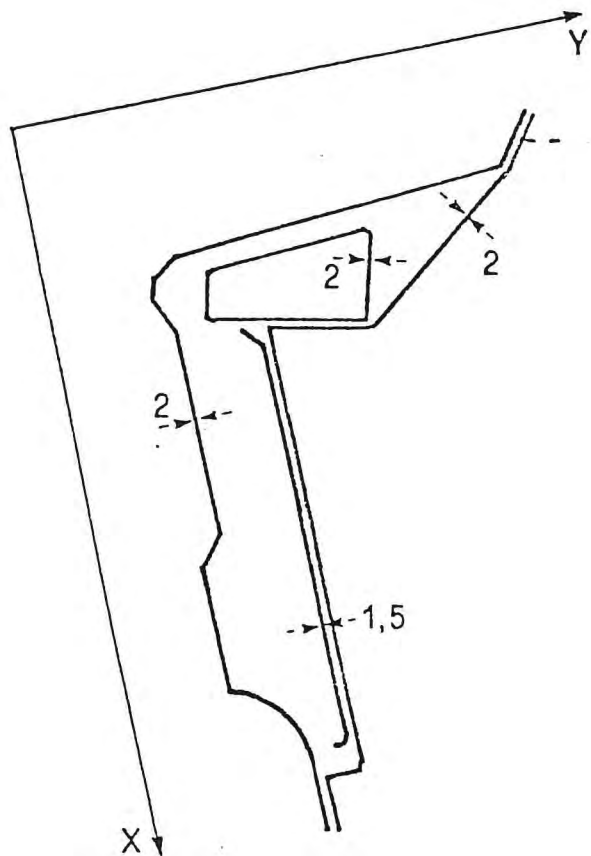
$$I_y = 11\,012,6$$

$$G_x = 3,83$$

$$G_y = 9,96$$

Fig. 7

SECTION C - C SCALE 1:2



$$A = 1520$$

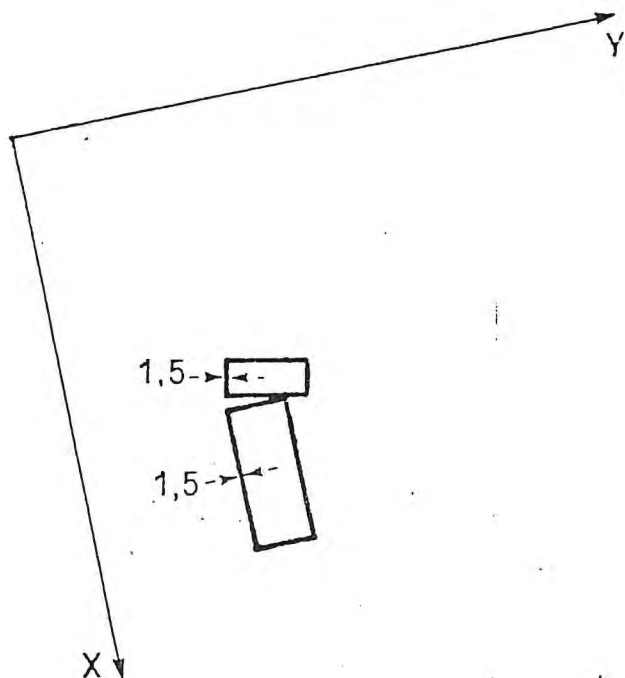
$$I_x = 1233\ 625$$

$$I_y = 4183\ 062$$

$$G_x = 28,5$$

$$G_y = 52,45$$

MODEL SCALE 1:2



$$A = 222$$

$$I_x = 5866,1$$

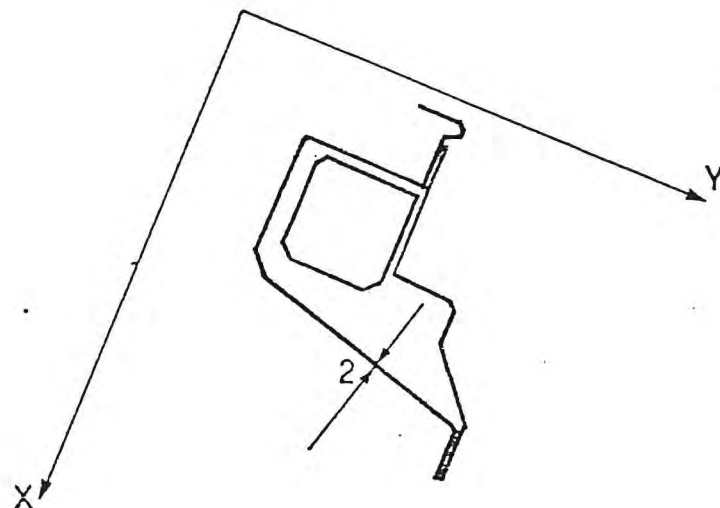
$$I_y = 24612,4$$

$$G_x = 5,14$$

$$G_y = 10,52$$

Fig. 8

SECTION D - D SCALE 1:2



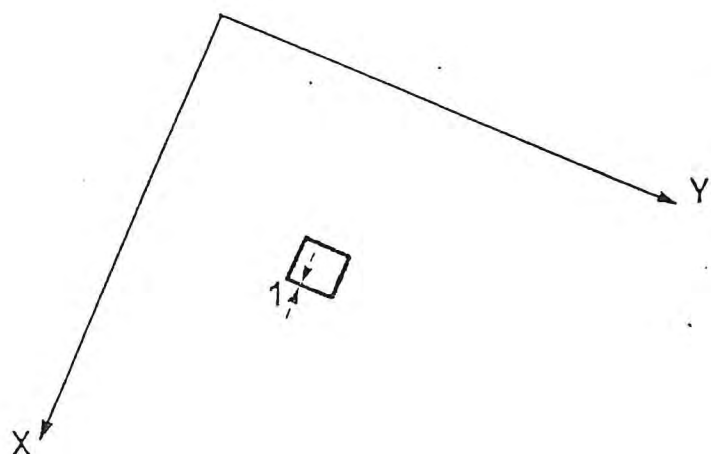
$$A = 966$$

$$I_x = 416\,625$$

$$I_y = 451\,500$$

$$G_x = 20,75$$

$$G_y = 21,6$$



MODEL SCALE 1:2

$$A = 46$$

$$I_x = 892,7$$

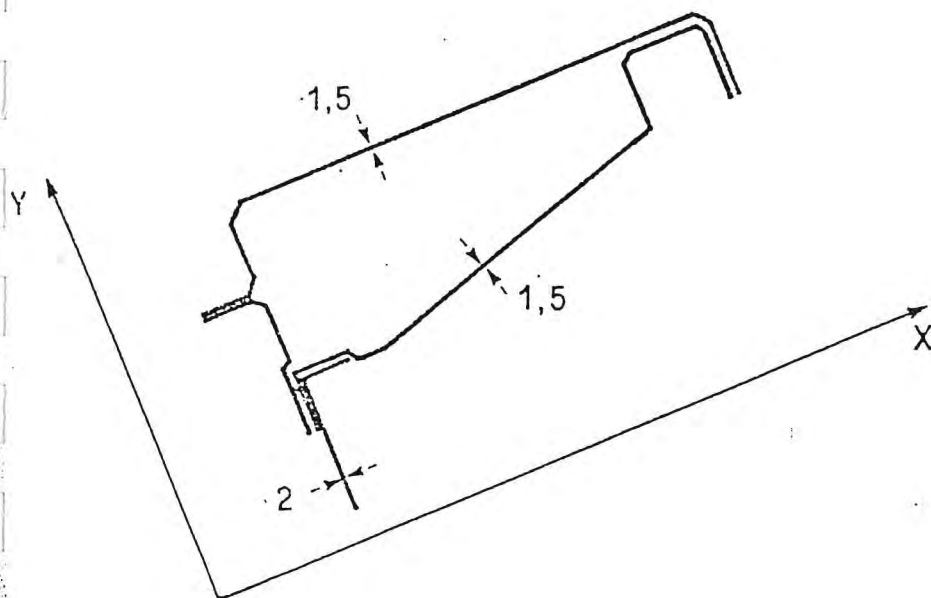
$$I_y = 892,7$$

$$G_x = 4,41$$

$$G_y = 4,41$$

Fig. 9

SECTION E-E SCALE 1:2



$$A = 725$$

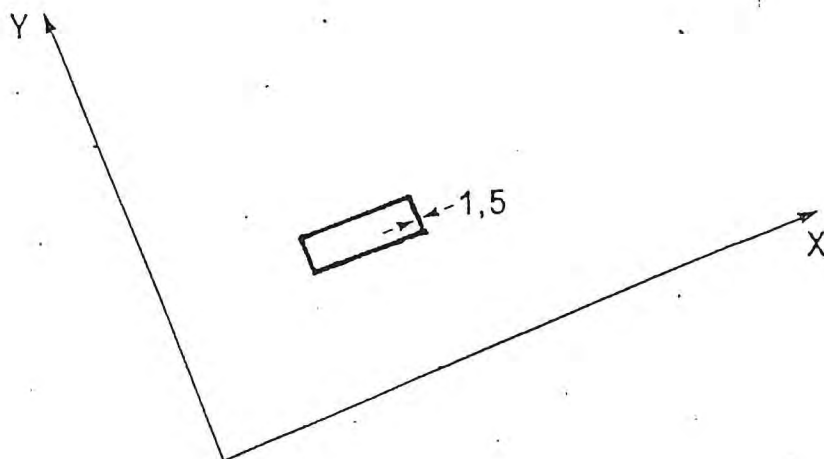
$$I_x = 304\,125$$

$$I_y = 1\,878\,625$$

$$G_x = 20,5$$

$$G_y = 50,9$$

MODEL SCALE 1:2



$$A = 111$$

$$I_x = 1624,8$$

$$I_y = 11012,6$$

$$G_x = 3,83$$

$$G_y = 9,96$$

Fig. 10

SECTION F-F SCALE 1:2

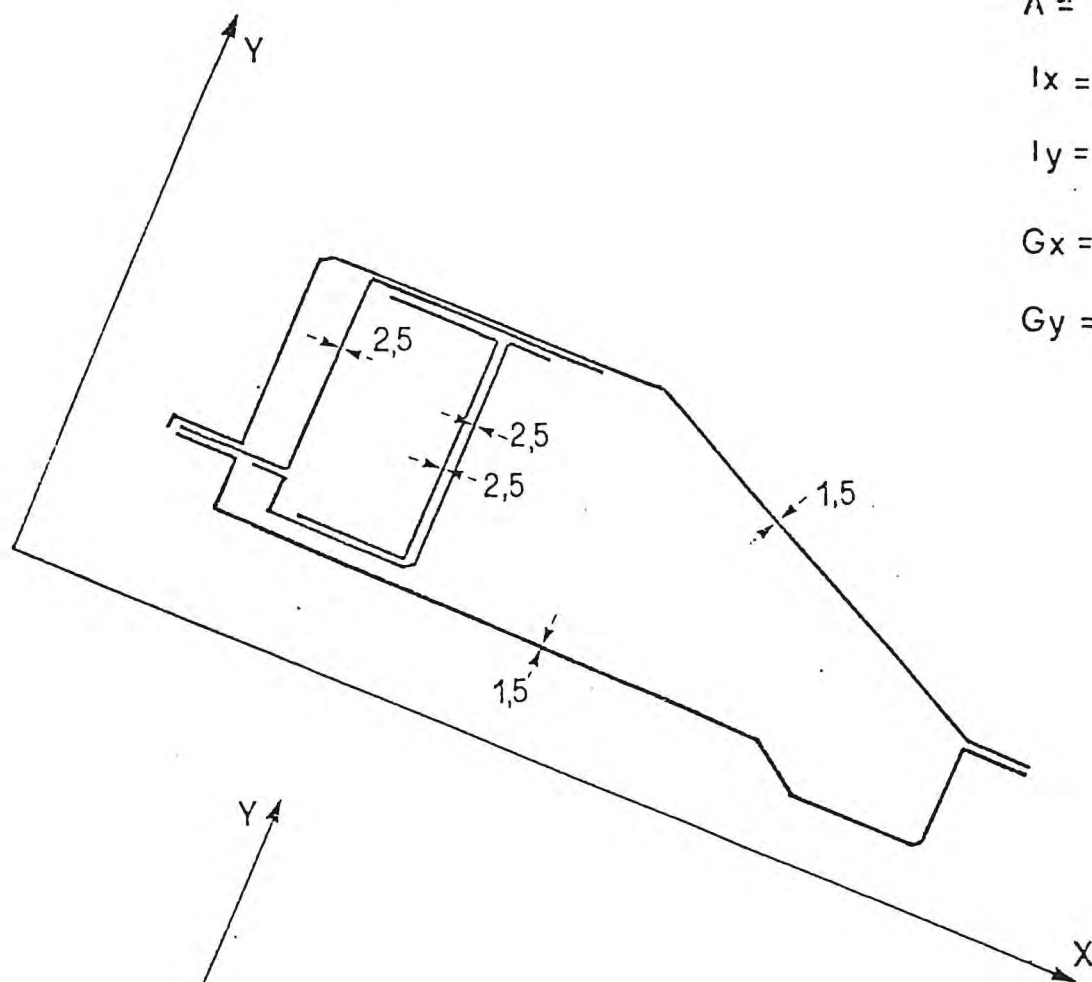
$$A = 1669,5$$

$$I_x = 1500812$$

$$I_y = 5855250$$

$$G_x = 30,0$$

$$G_y = 59,2$$



MODEL SCALE 1:2

$$A = 141$$

$$I_x = 4783,2$$

$$I_y = 20817,3$$

$$G_x = 5,82$$

$$G_y = 12,15$$

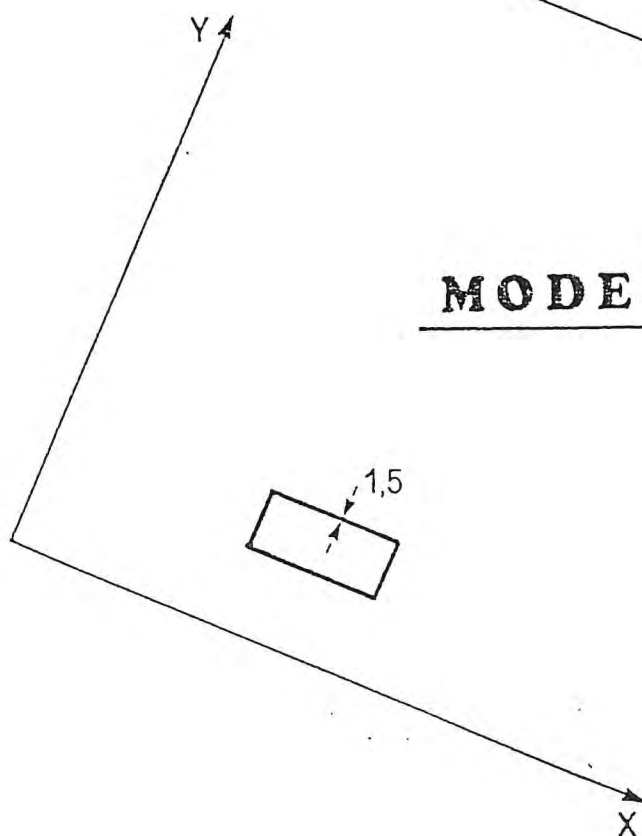


Fig. 11

- Momenti d'inerzia e centrifugo I_{xx} , I_{xy} , I_{yy} della sezione rispetto a 2 assi baricentrici paralleli ad x ed y;
- Angolo θ di cui vanno ruotati gli assi x e y affinché coincidano con gli assi centrali d'inerzia ξ e η ;
- Momenti centrali d'inerzia I_{ξ} , I_{η} .

Per avere un'idea della stampa ottenuta, si veda la Fig. 12 che riporta il tabulato relativo alla sezione 2; tutti i dati inerziali, ora ed oltre, sono espressi in mm.

Nel tabulato, oltre ai dati in uscita citati, compaiono le grandezze relative ai singoli tratti rettilinei in cui è stata scomposta la sezione originaria. Chiaramente sono state eliminate in questo modo tutte le bombature, sostituite nel calcolo da spigoli vivi.

SEZIONE 2

DATI RELATIVI ALLE SINGOLE AREE

			X0	Y0	TETA	SX	SY	IX	IY	IXY	AREA
1	PETTAGLIO SOTTILE		20.000	.000	.000	.000	1400.000	.000	42464.667	.000	80.000
2	PETTAGLIO SOTTILE		60.000	.000	90.000	.000	2704.000	.000	91738.447	.000	104.000
3	PETTAGLIO SOTTILE		60.000	52.000	90.000	.000	448.000	.000	7776.000	.000	72.000
4	PETTAGLIO SOTTILE		20.000	52.000	.000	.000	1600.000	.000	42464.667	.000	80.000
5	PETTAGLIO SOTTILE		20.000	.000	90.000	.000	2704.000	.000	91738.447	.000	104.000
6	PETTAGLIO SOTTILE		.000	26.000	.000	.000	800.000	.000	10466.667	.000	80.000

LEGENDA

X0,Y0.....COORDINATE DELL'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO LOCALE DELL'AREA I-ESIMA
TETA.....ANGOLO DI CUI E' ROTATO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO LOCALE (ESPRRESSO IN GRADI SESSAGESIMALI)
SX,SY.....MOMENTI STATICI DELL'AREA I-ESIMA RISPETTO AGLI ASSI LOCALI
IX,IY.....MOMENTI INERTIALI DELL'AREA I-ESIMA RISPETTO AGLI ASSI LOCALI
IXY.....MOMENTO CENTRIFUGO DELL'AREA I-ESIMA RISPETTO AGLI ASSI LOCALI

AREA TOTALE DELLA SEZIONE

AREA= 520.00000

MOMENTI STATICI E COORDINATE DEL BARICENTRO DELL'INTERA AREA RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO INIZIALE

SX= 14040.00000
SY= 10463.00000

XG= 38.15375
YG= 30.84015

MOMENTI D'INERZIA DELL'INTERA AREA RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO BARICENTRICO, TRASLATO RISPETTO A QUELLO INIZIALE

IXXG= 232951.02564
IYYG= 204227.62671
IXYG= 55052.30769

ANGOLO DI CUI VANNO ROTATI GLI ASSI, AFFINCHE' SIANO CENTRALI, E MOMENTI CENTRALI D'INERZIA

TETA= -30.17075 (GRADI SESSAGESIMALI)

ICSI= 274244.14059
ICET= 167942.47736

Fig. 12 - Tabulato prodotto dal programma "AREE".

3-4-2-2 - Calcolo delle caratteristiche inerziali richieste per il modello.

Avendo ora ottenuto i momenti d'inerzia baricentrici e conoscendo la posizione degli assi baricentrici, è facile ottenere i momenti d'inerzia rispetto agli assi n e q: detto γ l'angolo fra gli assi n ed x, che conosco dai disegni e chiamato $\alpha = (\theta - \gamma)$ l'angolo fra gli assi n e ξ (vedi Figura 14), posso scrivere:

(11)

$$I_n = \frac{(I_\xi + I_\eta)}{2} + \frac{(I_\xi - I_\eta)}{2} \cdot \cos \alpha$$

(12)

$$I_q = \frac{(I_\xi + I_\eta)}{2} - \frac{(I_\xi - I_\eta)}{2} \cdot \cos \alpha$$

Con queste due formule abbiamo dunque ottenuto i momenti d'inerzia rispetto agli assi n e q; in seguito essi sono stati introdotti, assieme

Fig. 13

PROGRAMMA CHE CALCOLA LE CARATTERISTICHE DEI PROFILATI GIA IN SCALA 1:5
SECONDO 2 IPOTESI : SEZIONE IN PARETE SOTTILE O SEZIONE RETTANGOLARE

I RISULTATI VENGONO MESSI NEL FILE RESULT.OUT

```

PROGRAM IPO
REAL IP,IQ,SEZ,AREA,B,H,IPRID,IQRID,AREARI,RP,RQ
15 READ(1,1)SEZ
1 FORMAT(9X,A4,/)
IF(SEZ.EQ,'FINE') GO TO 100
READ(1,2) IP,IQ
2 FORMAT(5X,F10.0,6X,F10.0,///)
WRITE(6,3) SEZ
3 FORMAT(' SEZIONE ',A4,/, ' PRIMA IPOTESI : SEZIONE IN PARETE
SOTTILE',/)
IPRID=IP/625
IQRID=IQ/625
PRINT 10,SEZ

10 FORMAT(' QUANTO VALE L AREA DELLA SEZIONE ',A4,' ? ')
READ(5,11) AREA
11 FORMAT(F10.2)
AREARI=AREA/25
WRITE(6,4) IPRID,IQRID,AREARI
4 FORMAT(' LA SEZIONE DEL PROFILATO DEVE AVERE QUESTE CARATTERISTIC
SHE',/, ' (GIA IN SCALA) : IP = ',F8.1,', IQ = ',F8.1,', AREA = ',F8.2)
P=SQRT(IPRID/AREARI)
Q=SQRT(IQRID/AREARI)
WRITE(6,45) P,Q
45 FORMAT(' RAGGI DI INERZIA (RIDOTTI) : RP=',F6.2,', RQ=',F6.2)
WRITE(6,5)
5 FORMAT(///, ' SECONDA IPOTESI : SEZIONE RETTANGOLARE',/)
RP=SQRT(IP/AREA)
RQ=SQRT(IQ/AREA)
H=RP*SQRT(12.)/5
B=RQ*SQRT(12.)/5
WRITE(6,6) H,B
6 FORMAT(' IN QUESTO CASO I LATI (GIA RIDOTTI) SONO : H=',F6.2,', B='
S,F6.2,/////)
GO TO 15
100 CONTINUE
STOP
END

```

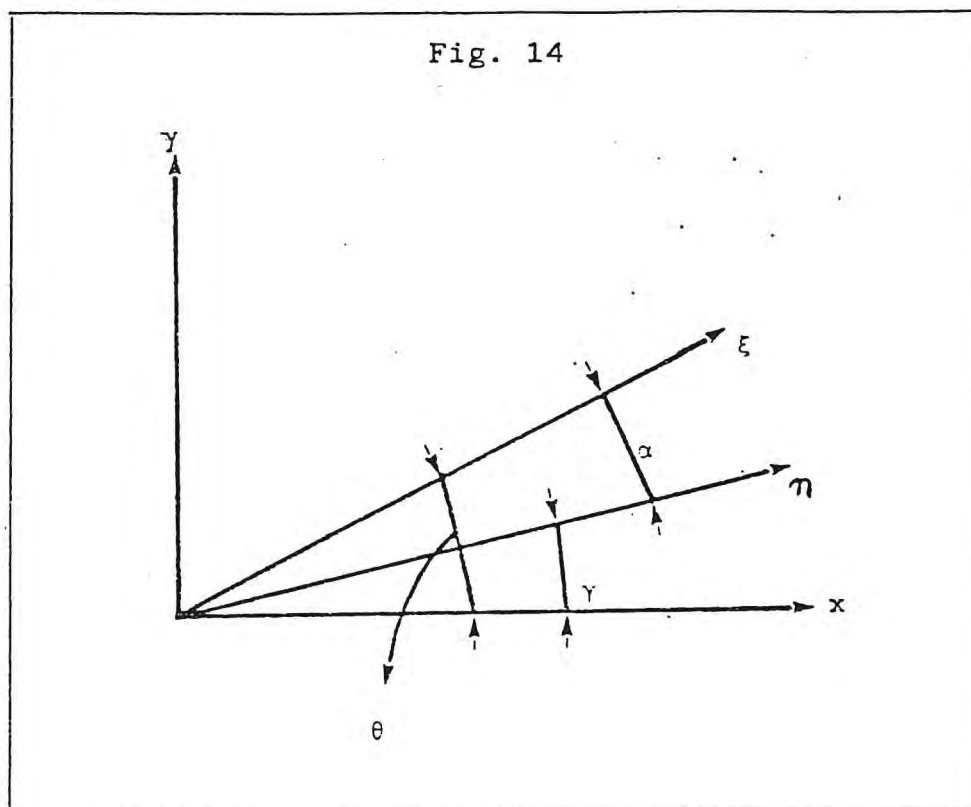
SEZIONE 2

PRIMA IPOTESI : SEZIONE IN PARETE SOTTILE

LA SEZIONE DEL PROFILATO DEVE AVERE QUESTE CARATTERISTICHE
(GIA IN SCALA) : IP = 302.0 IQ = 400.7 AREA = 20.80
RAGGI DI INERZIA (RIDOTTI) : RP= 3.81 RQ= 4.39

SECONDA IPOTESI : SEZIONE RETTANGOLARE

IN QUESTO CASO I LATI (GIA RIDOTTI) SONO : H= 13.20 B= 15.20



al valore dell'area di ogni sezione, in un programma Fortran da noi realizzato, denominato IPO che è visibile in Figura 13; esso fornisce, per ogni sezione, due ipotesi di messa in scala: sezione in parete sottile e sezione rettangolare piena.

Nella prima ipotesi vengono forniti area e momenti d'inerzia ridotti in scala (rispettivamente

te quadratica e quartica) nonché i raggi d'inerzia in scala semplice (a noi interessano solo questi ultimi); nella seconda ipotesi vengono forniti invece base ed altezza di un rettangolo pieno che fornisca i raggi voluti.

In questo programma l'asse n è chiamato p , per evitare errori fra n ed n . Un esempio dell'elaborato prodotto dal programma IPO è visibile in Figura 13, relativa sempre alla sezione 2.

3-4-2-3 - Calcolo delle caratteristiche inerziali dei profilati disponibili in commercio e scelta degli stessi.

A questo punto ci siamo procurati presso la Ditta "Mida" il listino dei profilati di alluminio di sezione usuale. Esso riporta forma, dimensioni d'ingombro e spessore di profilati delle seguenti forme (fra parentesi è indicato il carattere che le contraddistingue):

- * quadrato pieno (P);
- * quadro vuoto (Q);
- * sezione a T (T);
- * sezione a L a lati uguali (L);
- * barre piatte (B);
- * rettangolo vuoto (R);
- * sezione a U (U).

Il listino però non riportava i parametri inerziali delle suddette sezioni; d'altronde, il calcolo di essi tramite il programma "Aree" si presentava lungo e faticoso, poiché con esso è necessario introdurre ogni sezione come somma di segmenti orientati nel piano, inseriti in un opportuno riferimento; ad esempio per un "rettangolo vuoto" sarebbero state necessarie cinque schede-dati e si consideri che nel catalogo erano elencati circa 300 profilati.

Abbiamo dunque creato un nuovo programma, denominato PROFIL, in Pascal, che effettua il cal-

colo dei momenti d'inerzia, dell'area e dei raggi d'inerzia per profilati dei tipi prima indicati.

La lista del programma PROFIL è visibile in Figura 15, con un esempio del tabulato prodotto.

E' chiaro come, confrontando i dati richiesti dal programma IPO con quelli così ottenuti dal programma PROFIL, è stato facile scegliere per ogni sezione il profilato che più si avvicinasse alle caratteristiche ottimali.

Nel caso che i raggi d'inerzia fossero ugualmente ottenuti da due diversi profilati, abbiamo sempre optato per quello che creava minori problemi di montaggio, oppure che assomigliava di più al montante originale.

Nella Figura 16 è riportata una tabella che indica, sezione per sezione, il profilato scelto e le sue caratteristiche.

```

PROGRAM PROFIL(INPUT,OUTPUT,REGISTR)
VAR CAR:CHAR;
A,H,B,L,S,IX,IY,RX,RY:REAL;
REGISTR:TEXT;
FUNCTION CUBO(PARAM:REAL):REAL;
BEGIN
CUBO:=PARAM*PARAM*PARAM;
END;
BEGIN
REWRITE(REGISTR);
WRITELN(REGISTR,' TABELLA DEI PROFILATI DI ALLUMINIO DISPONIBILI PRESSO LA DITTA MIDA ');
WRITELN(REGISTR);
WRITELN(REGISTR,' SEZIONI TIPO : Q= QUADRATA VUOTA I T= SEZIONE A T ');
WRITELN(REGISTR,' P= QUADRATA PIENA I B= BARRE PIATTE I R= RETTANGOLO VUOTO ');
WRITELN(REGISTR,' U= SEZ A U I L= SEZ A L A LATI UGUALI ');
WRITELN(REGISTR);
WRITE(' INTRODUCI IL SIMBOLO ');
READ(CAR);WRITELN(' READLN ');
WHILE NOT(CAR='0') DO
BEGIN
L:=0; S:=0; H:=0; B:=0;
CASE CAR OF
'Q': BEGIN
WRITE(' L=? ');READ(L);
WRITE(' S=? ');READ(S);WRITELN(' READLN ');
IX:=2*(L*S*SQR(L/2-S/2)+2*(S*CUBO(L/2-S/3)));
IY:=IX;
A:=4*L*S-2*SQR(S);
END;
'T': BEGIN
WRITE(' B=? ');READ(B);WRITE(' H=? ');READ(H);
WRITE(' S=? ');READ(S);WRITELN(' READLN ');
IX:=B*CUBO(S)/12+S*CUBO(H-S)/12+SQR(H/2)*B*SQR(S)*(H-S)/(B*S+S*(H-S));
IY:=CUBO(B)*S/12+CUBO(S)*(H-S)/12;
A:=B*S+S*(H-S);
END;
'P': BEGIN
WRITE(' L=? ');READ(L);
WRITELN(' READLN ');
IX:=SQR(SQR(L))/12;
IY:=IX;
A:=SQR(L);
END;
'B': BEGIN
WRITE(' L=? ');READ(L);WRITE(' S=? ');READ(S);
WRITELN(' READLN ');
IX:=L*S*S/12;
IY:=S*L*L/12;
A:=S*L;
END;
'R': BEGIN
WRITE(' B=? ');READ(B);WRITE(' H=? ');READ(H);
WRITE(' S=? ');READ(S);WRITELN(' READLN ');
IX:=2*S*B*SQR(H/2-S/2)+4*S*CUBO(S/2-S/3);
IY:=2*S*B*SQR(B/2-S/2)+4*S*CUBO(B/2-S/3);
A:=2*(B*S+S*(H-2*S));
END;
'U': BEGIN
WRITE(' B=? ');READ(B);WRITE(' H=? ');READ(H);
WRITE(' S=? ');READ(S);WRITELN(' READLN ');
IX:=B*CUBO(S)/12+2*S*CUBO(H-S)/12+SQR(H/2)*B*SQR(S)*2*(H-S)/(B*S+2*S*(H-S));
IY:=2*B*S*SQR(B/2-S/2)+S*CUBO(B-S)/12;
A:=2*B*S+(B-2*S)*S;
END;
'L': BEGIN
WRITE(' L=? ');READ(L);WRITE(' S=? ');READ(S);
WRITELN(' READLN ');
IX:=L*CUBO(S)/3+S*CUBO(L)/3-(2*L*S-SQR(S))*SQR(L/4+3/B*S);
IY:=IX;
A:=2*L*S-SQR(S);
END;
END;(* CASE *)
RX:=SORT(IX/A);
RY:=SORT(IY/A);
WRITELN(REGISTR,' SEZ TIPO ' CAR, ' B=' B:4:0, ' H=' H:4:0, ' L=' L:4:0, ' S=' S:4:1);
WRITELN(REGISTR,' IX=' IX:8:1, ' IY=' IY:8:1, ' AREA=' A:7:2, ' RX=' RX:7:2, ' RY=' RY:7:2);
WRITE(' INTRODUCI UN ALTRO CARATTERE ');READ(CAR);
WRITELN(' READLN ');
END;(* WHILE *)
END. (* FINE DEL PROGRAMMA *)

```

TABELLA DEI PROFILATI DI ALLUMINIO DISPONIBILI PRESSO LA DITTA MIDA

SEZIONI TIPO : Q= QUADRATA VUOTA I T= SEZIONE A T
P= QUADRATA PIENA I B= BARRE PIATTE I R= RETTANGOLO VUOTO
U= SEZ A U I L= SEZ A L A LATI UGUALI

SEZ TIPO L B=	0.	H=	0.	L=	35.	S=	3.0			
IX=	23589.4	IY=	23589.4	AREA=	201.00	RX=	10.83	RY=	10.83	
SEZ TIPO T B=	10.	H=	10.	L=	0.	S=	1.5			
IX=	251.9	IY=	127.4	AREA=	27.75	RX=	3.01	RY=	2.14	
SEZ TIPO T B=	15.	H=	15.	L=	0.	S=	1.5			
IX=	911.3	IY=	425.7	AREA=	42.75	RX=	4.62	RY=	3.16	
SEZ TIPO T B=	20.	H=	20.	L=	0.	S=	2.0			
IX=	2880.1	IY=	1345.3	AREA=	76.00	RX=	6.16	RY=	4.21	
SEZ TIPO T B=	25.	H=	15.	L=	0.	S=	2.0			
IX=	1345.0	IY=	2612.8	AREA=	76.00	RX=	4.21	RY=	5.86	

SEZ TIPO B B=	0.	H=	0.	L=	60.	S=	3.0			
IX=	625.0	IY=	90000.0	AREA=	300.00	RX=	1.44	RY=	17.32	
SEZ TIPO B B=	0.	H=	0.	L=	60.	S=	8.0			
IX=	2560.0	IY=	144000.0	AREA=	480.00	RX=	2.31	RY=	17.32	

Fig. 15 - Programma PROFIL.

Fig. 16 - Profilati scelti per le sezioni dei montanti del modello.

sezione	tipo	B	H	L	S	Area	I_x	I_y	r_x	r_y
		mm.	mm.	mm.	mm.	mm ²	mm ⁴	mm ⁴	mm.	mm.
1	B			15	5	75	1406.3	156.3	4.33	1.44
2	T	15	15		1.5	42.75	425.7	911.3	3.16	4.62
3	T	15	15		1.5	42.75	425.7	911.3	3.16	4.62
4	R	25	10		1.5	96	6803.9	1353.8	8.42	3.76
5	Q			40	2	312	73312.0	73312.0	15.33	15.33
6	B			15	5	75	156.3	156.3	1.44	1.44
7	Q			10	1	38	490.3	490.3	3.59	3.59
A-A	R	30	10		1.5	111	1624.8	11012.6	3.83	9.96
E-E1	R	20	10		1.5	81	3795.1	1082.9	6.84	3.66
E-E	R	30	10		1.5	111	1624.8	11012.6	3.83	9.96
D-D	Q			12	1	46	892.7	892.7	4.41	4.41
C-C	R	35	15		1.5	141	4783.2	20817.3	5.82	12.15
D-D1	R	20	10		1.5	81	1082.9	3795.1	3.66	6.84
F-F	R	35	15		1.5	141	4783.2	20817.3	5.82	12.15

3-4-2-4 - Rapporti di scala per le forze.

Partendo dalla condizione (5) si ottiene:

(12)

$$\frac{q'_m \cdot L'_m}{E_m I_m} = \frac{q'_p \cdot L'_p}{E_p I_p}$$

dalla quale avendo posto:

$$F_m = q'_m \cdot L_m$$

$$F_p = q'_p \cdot L_p$$

ottengo:

(13)

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{E_m L_p^2}{E_p L_m^2} \cdot \frac{I_m}{I_p}$$

in essa la prima frazione può essere espressa numericamente essendo 1:5 il rapporto L_m/L_p ed essendo noti dalla Figura 5 i moduli elastici di alluminio e acciaio; ottengo:

(14)

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{I_m}{I_p} \cdot 8.575$$

ovviamente useremo i momenti d'inerzia valutati rispetto all'asse n , cioè quelli che si oppongono all'effettiva vibrazione trasversale della trave.

Nella Figura 17 sono dunque raffrontate le caratteristiche inerziali dei profilati del modello e dei montanti del prototipo, viene fatto il confronto fra i due raggi d'inerzia r_{nm} e r_{np} , e viene effettuato il calcolo del rapporto F_m/F_p in accordo alla (14).

Notiamo però che non sempre il rapporto r_m/r_p vale esattamente 1:5; ciò significa che in quei profilati ove ciò non accade la condizione (3) non è più equipollente con la (5) e valutando rispetto ad essa il rapporto delle forze si ottiene:

Fig. 17 - Confronto fra i montanti del modello e del prototipo - $F_m/F_p = 8.575 \cdot I_m/I_p$

SECTIONS	$(r_x)_p$	$(r_x)_m$	r_m/r_p	$(I_x)_p$	$(I_x)_m$	I_m/I_p	F_m/F_p
	mm	mm	/	mm ⁴	mm ⁴	/	/
1	22.4	4.33	1/5.17	10.6 . 10 ⁶	14.1 . 10 ²	1/75	1/8.84
2	19.0	3.16	1/6.01	18.9 . 10 ⁴	4.2 . 10 ²	1/450	1/52.6
3	13.7	3.16	1/4.33	9.0 . 10 ⁴	4.2 . 10 ²	1/214	1/25
4	39.5	8.42	1/4.69	115.2 . 10 ⁴	68.0 . 10 ²	1/169	1/20
5	74.9	15.33	1/4.88	1300.8 . 10 ⁴	733.1 . 10 ²	1/177	1/20.8
6	7.2	1.44	1/5	1.1 . 10 ⁴	1.6 . 10 ²	1/177	1/8.2
7	16.0	3.59	1/4.45	12.0 . 10 ⁴	4.9 . 10 ²	1/244	1/28.6
A-A	19.8	3.83	1/5.16	31.2 . 10 ⁴	16.2 . 10 ²	1/192	1/22.7
B-B1	26.8	6.84	1/3.91	58.2 . 10 ⁴	37.9 . 10 ²	1/153	1/18.2
E-E	20.5	3.83	1/5.35	30.4 . 10 ⁴	16.2 . 10 ²	1/187	1/22.2
D-D	20.7	4.41	1/4.69	41.7 . 10 ⁴	8.9 . 10 ²	1/468	1/58.8
C-C	28.5	5.14	1/5.54	123.4 . 10 ⁴	58.6 . 10 ²	1/210	1/30.3
D-D1	16.2	3.66	1/4.42	15.8 . 10 ⁴	10.8 . 10 ²	1/146	1/17.2
F-F	30.0	5.82	1/5.15	150.1 . 10 ⁴	47.8 . 10 ²	1/314	1/37

(15)

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{E_m A_m}{E_p A_p} = 0.34 \frac{A_m}{A_p}$$

I valori di F_m/F_p così ottenuti differiscono dai precedenti e sono riportati in Figura 18; si vede comunque dal confronto fra le Figure 17 e 18 che i valori del rapporto sono abbastanza simili comunque vengano calcolati.

Notevole è invece la differenza fra i rapporti di riduzione di montanti diversi: si va infatti da $1/61.7$ a $1/8.20$, con una variazione di circa 8 volte; va detto però che la maggior parte delle aste ha rapporti molto vicini al valore newtoniano $1/25$ e che le poche eccezioni sono ugualmente assortite in più e in meno, per cui possiamo pensare che almeno in parte gli errori si compensino. Resterà da vedere se questo valore medio di riduzione delle forze sarà prossimo al valore calcolato per le altre parti della struttura.

Fig. 18 - Confronto fra i montanti del modello
e del prototipo - $F_m / F_p = 0.34 A_m / A_p$

SEZIONE	A_m	A_p	A_m/A_p	F_m/F_p
	mm	mm	/	/
1	75	212	1/2.82	1/8.31
2	42.75	520	1/12.16	1/35.7
3	42.75	480	1/11.22	1/33
4	96	730	1/7.6	1/22.36
5	312	2315	1/7.41	1/21.82
6	75	220	1/2.93	1/8.62
7	38	464	1/12.2	1/35.9
A-A	111	793	1/7.14	1/21
E-E1	81	809	1/9.98	1/29.37
E-E	111	725.25	1/6.53	1/19.21
D-D	46	966	1/21	1/61.7
C-C	141	1520.5	1/10.78	1/31.7
D-D1	81	606	1/7.48	1/22
F-F	141	1669.5	1/11.84	1/34.82

3-4-3 - Piastre metalliche.

Le parti della struttura del prototipo rispondenti realmente a questo schema sono poche; tuttavia abbiamo già notato come, nel campo di frequenze che ci interessano, anche le parti bombate o nervate possono essere ricondotte a lastre piane.

Per meglio dire è possibile vedere che, per ciò che attiene il regime vibrazionale, gli sforzi predominanti in questi elementi strutturali sono di tipo flessionale e non di tipo membranale.

Ciò non è più vero per gli spazi dovuti ai carichi esterni, ad esempio quelli conseguenti al ribaltamento del veicolo, che vengono sopportati dalla struttura mediante lo sviluppo di un regime di sollecitazione, nelle scatolature, di pura trazione o compressione delle pareti opposte alle "scatole".

Per quanto visto dunque occorre rispettare

queste condizioni di progetto:

(16)

$$\frac{\rho_S}{E_S} \cdot \omega^2 \cdot \frac{L^4}{h^2} \cdot (1 - \nu^2) = \text{cost}$$

(17)

$$\frac{qL^3}{E_S h^3} (1 - \nu^2) = \text{cost}$$

Ci sarebbe poi da controllare la condizione di accoppiamento acustico:

(18)

$$\frac{\rho_o c_o^2 \cdot L^3}{E_S h^3} (1 - \nu^2) = \text{cost}$$

Siccome non esistono lati liberi non compare fastidiosa $\nu = \text{cost}$; inoltre, supponendo incastrati fra loro tutti i lati, non compaiono nemmeno

le altre condizioni al contorno.

Vediamo, partendo dalla (16), quale spessore occorre scegliere se vogliamo usare il Perspex al posto dell'acciaio; abbiamo:

(19)

$$\frac{\rho_m}{E_m} \cdot \omega_m^2 \cdot \frac{L_m^4}{h_m^2} \cdot (1 - \nu_m^2) = \frac{\rho_p}{E_p} \cdot \omega_p^2 \cdot \frac{L_p^4}{h_p^2} (1 - \nu_p^2)$$

da essa ricaviamo il rapporto h_m/h_p , tenendo presenti i valori numerici delle grandezze riportate nella Figura 5 ed il rispetto della condizione acustica (1):

(20)

$$h_m/h_p = 0.48$$

Siccome la gran parte delle strutture stampate è spessa 2 mm. dovremmo usare lastre di Perspex spesse 0.96 mm. Purtroppo però in commercio esiste solo lo spessore di 1 mm., per cui abbiamo

dovuto ripiegare su di esso. Ciò produce in pratica un non perfetto rispetto della condizione (16) e ne consegue un fattore di amplificazione, per le frequenze strutturali, superiore a 5; difatti, se dalla (19) ricaviamo $\frac{\omega_m}{\omega_p}$, mettendo in essa $\frac{h_m}{h_p} = 0.5$, otteniamo:

(21)

$$\frac{\omega_m}{\omega_p} = 5.21$$

la quale dimostra come lo scostamento dal valore teorico sia del 4%, proprio come l'errore commesso sullo spessore.

Vediamo ora di calcolare dalla (17) il rapporto di riduzione delle forze; ponendo in analogia con il paragrafo precedente:

(22)

$$F = qL^2$$

dalla (17) otteniamo:

(23)

$$\frac{F_m L_m}{E_m h_m^3} \cdot (1 - \nu^2) = \frac{F_p L_p}{E_p h_p^3} (1 - \nu^2)$$

Ricavando dunque da essa il rapporto F_m/F_p , considerando che h_m/h_p vale 0.5 e ricordando i valori delle grandezze fisiche dati dalla Figura 5, ho:

(24)

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{1}{61.5}$$

Questo rapporto è circa la metà del valore del rapporto ottenuto mediamente per i montanti, per cui, nel modello, le risonanze proprie della piastra risulteranno più forti di circa 6 dB di quelle dovute ai montanti (supposte di uguale intensità nel prototipo).

Resta infine da controllare che la condizione di accoppiamento (18) sia almeno approssimativamente soddisfatta; essendo costante $\rho_0 c_0^2$ (usiamo sempre aria), si ottiene da essa questo valore:

(25)

$$\frac{h_m}{h_p} = 0.675$$

mentre il valore adottato è stato 0.5; dunque c'è un errore del 25% in meno.

Tuttavia notiamo che, sempre poiché gli spessori commerciali del Perspex crescono a gradini di 0.5 mm, avremmo probabilmente adottato lo spessore di 1 mm comunque, anche proponendoci in partenza di rispettare la condizione di accoppiamento piuttosto che quella strutturale.

Il mancato rispetto della (25) produce, in pratica, una variazione della pressione sonora nel modello rispetto al prototipo, che vale:

(26)

$$\frac{p_m}{p_p} = \frac{F_m}{F_p} \frac{L_p^2}{L_m^2} = 0.406$$

cioè nel modello occorrono pressioni acustiche inferiori di circa 7.8 dB a quelle del prototipo per produrre la stessa sollecitazione strutturale delle parti in acciaio. Di ciò occorrerà tenere conto unicamente se solleciteremo il modello con un campo acustico esterno.

In pratica la (26) ci dice che il nostro modello risente di più rispetto al prototipo della presenza del mezzo acustico al posto del vuoto.

3-4-4 - Lastre di vetro.

I vetri sono senza alcun dubbio, a tutti gli effetti, lastre piane. Essi sono montati elastica-

mente, per cui possiamo pensare che risentano solo in minima parte delle vibrazioni della struttura circostante. Essi saranno sollecitati essenzialmente dal campo acustico, a meno che noi non andiamo a picchiare proprio su di un vetro.

Nell'ipotesi dunque di sollecitazioni esterne applicate alla struttura metallica sarà opportuno preoccuparci innanzitutto della condizione di accoppiamento acustico ed in seguito delle altre.

Ecco che abbiamo da rispettare queste condizioni:

(27)
ACCOPPIAMENTO

$$\frac{\rho_0 c_0^2}{E_s} \cdot \frac{L^3}{h^3} (1-\nu^2) = \text{cost}$$

(28)
STRUTTURALE

$$\frac{\rho_s}{E_s} \cdot \omega^2 \cdot \frac{L^2}{h^2} (1-\nu^2) = \text{cost}$$

(29)
FORZANTE

$$\frac{qL^3}{E_s h^3} (1-\nu^2) = \text{cost}$$

Dalla (27), inserendo i valori della tabella di Figura 5 per Perspex e vetro e tenendo conto che $\rho_0 c_0^2$ è costante, otteniamo:

(30)

$$\frac{h_m}{h_p} = 0.465$$

Siccome poi i vetri del prototipo sono spessi 6 mm., ottengo:

(31)

$$h_m = 2.8 \text{ mm.}$$

La lastra di spessore commerciale più vicina

a questo valore è quella spessa 3 mm. Adottando essa, commettiamo dunque un errore del 7.5%. Ciò significa che sarà necessaria una pressione sonora maggiore di quella del prototipo per eccitare i vetri del modello nella stessa misura; sarà cioè:

(32)

$$\frac{p_m}{p_p} = 1.24$$

il che significa che occorrerà un campo acustico più forte di 1.86 dB.

La (32) praticamente ci dice che, seppure di poco, i vetri del modello saranno meno sollecitati acusticamente di quelli del prototipo.

Vediamo ora se lo spessore scelto soddisfa la condizione strutturale (28); da essa otteniamo:

(33)

$$\frac{h_m}{h_p} = 0.485$$

dunque anche in questo caso abbiamo la necessità di adottare, per i vetri, lastre di Perspex spesse 3 mm.; ciò significa che, percuotendo i vetri, essi risponderanno quasi come nel prototipo, con frequenze proprie aumentate solo leggermente: sempre dalla (28) ho infatti:

(34)

$$\frac{\omega_m}{\omega_p} = 5.15$$

lo slittamento in frequenza è addirittura inferiore a quello prodotto dalle lastre metalliche.

Qualora si effettuassero misure percuotendo i vetri diverrebbe necessario conoscere il rapporto di riduzione delle forze per essi; ciò inoltre ci permette di vedere se le azioni che arrivano ai vetri attraverso le guarnizioni in gomma finiscono nella giusta scala.

Partendo dall'equazione (29) e ponendo come
sempre:

(35)

$$F = qL^2$$

ottengo:

(36)

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{1}{20.1}$$

che è abbastanza prossima al valore newtoniano;
di questo valore del rapporto occorrerà tenere
conto se andremo a fare misure con eccitazione
meccanica dei vetri.

Fig. 19 - Rispetto delle condizioni di progetto .

	Parametro Adimensionale Caratteristico	Valore numerico del rapporto $(N)_m/(N)_p$ (il valore teorico è $(N)_m/(N)_p=1$)
Mezzo Acustico	$N_1 = \frac{\omega L}{c_0}$	$(N_1)_m/(N_1)_p = 1$
TRAVI	LONG. VIB. $N_2 = \frac{\omega^2 L^2 \rho_s}{E}$ $N_3 = q \frac{L G^2}{E I}$	$(N_2)_m^A/(N_2)_p^S = 0.96$ $(N_3)_m^A/(N_3)_p^S = \frac{q_m}{q_p} \frac{I_p}{I_m} 2.22 \cdot 10^{-2}$
	TRANSV. VIB. $N_4 = \frac{\omega^2 L^4 \rho_s}{E G^2}$ $N_5 = q \frac{L^3}{E I}$	$(N_4)_m^A/(N_4)_p^S = 0.96$ $(N_5)_m^A/(N_5)_p^S = \frac{q_m}{q_p} \frac{I_p}{I_m} 2.22 \cdot 10^{-2}$
LASTRE PIANE	LONG. VIB. $N_6 = \frac{\omega^2 L^2 \rho_s (1-\nu^2)}{E}$ $N_7 = q \frac{L(1-\nu^2)}{E h}$	$(N_6)_m^{PX}/(N_6)_p^S = 5.74$ $(N_6)_m^{PX}/(N_6)_p^R = 5.90$ $(N_7)_m^{PX}/(N_7)_p^S = \frac{q_m}{q_p} 15.38$ $(N_7)_m^{PX}/(N_7)_p^R = \frac{q_m}{q_p} 7.55$
	TRANSV. VIB. $N_8 = \frac{\omega^2 L^4 \rho_s (1-\nu^2)}{E h^3}$ $N_9 = q \frac{L^3 (1-\nu^2)}{E h^3}$ $N_{10} = \frac{E_0 c_0 L}{E h^3} (1-\nu^2) (^\circ)$ $N_{11} = \nu (^\circ)$	$(N_8)_m^{PX}/(N_8)_p^S = 0.92$ $(N_8)_m^{PX}/(N_8)_p^R = 0.94$ $(N_9)_m^{PX}/(N_9)_p^S = \frac{q_m}{q_p} 2.46$ $(N_9)_m^{PX}/(N_9)_p^R = \frac{q_m}{q_p} 0.81$ $(N_{10})_m^{PX}/(N_{10})_p^S = 2.46$ $(N_{10})_m^{PX}/(N_{10})_p^R = 0.81$ $(N_{11})_m^{PX}/(N_{11})_p^S = 1.36$ $(N_{11})_m^{PX}/(N_{11})_p^R = 1.75$

(^v) Condizione di accoppiamento acustico
(^{oo}) Condizione al contorno in caso di lato libero .

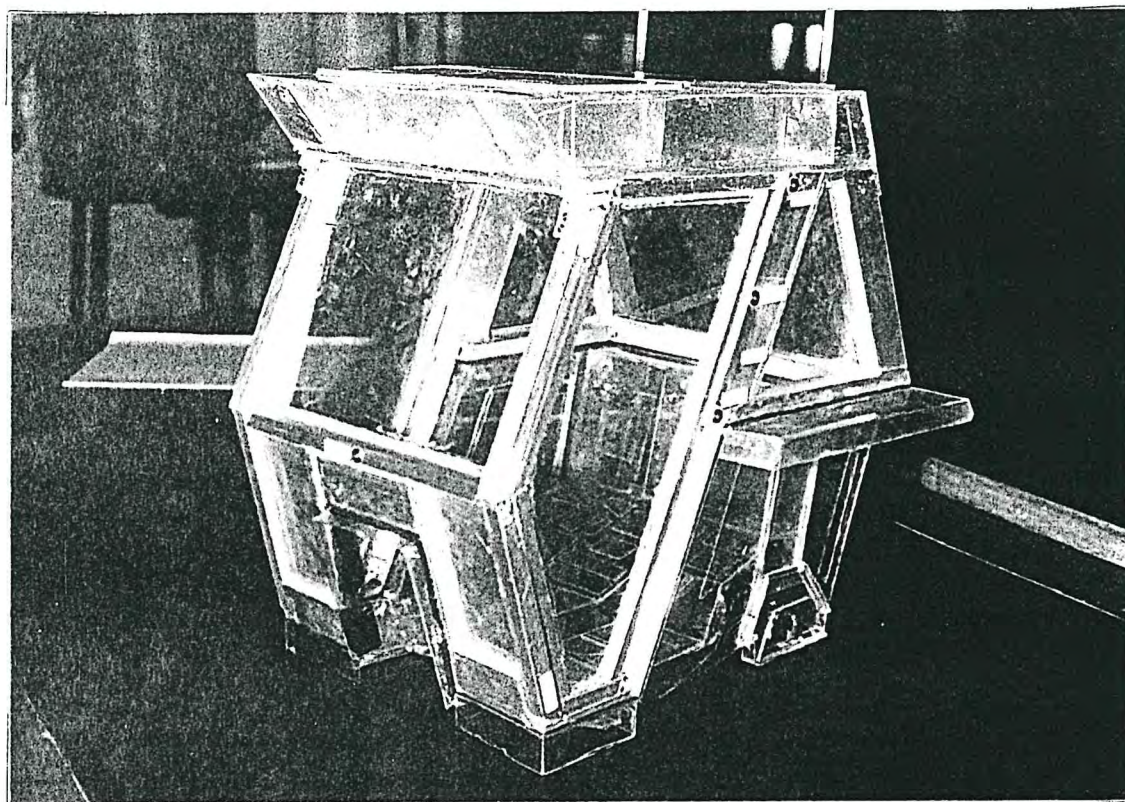
3-5 - COSTRUZIONE DEL MODELLO

Avendo a questo punto scelto i materiali adatti ci siamo procurati tutto quanto necessitava. Oltre al Perspex ed ai profilati di alluminio abbiamo usato anche:

- gomma al neoprene spessa 1 mm., per la guarnizione che separa la cabina vetrata dalla parte sottostante;
- vitine autofilettanti in acciaio 12x2, per fissare la cabina a vetri alla parte sottostante;
- silicone acetico, per unire i vetri ai rispettivi telai;
- adesivo strutturale viscoso (Loctite 427) ed adesivo strutturale liquido (Bostik 800) per gli incollaggi d'angolo;
- collante per Perspex (Tensol Cement n°12) per gli incollaggi di piatto.

Al termine del lavoro di montaggio, il modello è risultato parecchio robusto, leggero (pesa

Foto 8



Kg.2,400) e di dimensioni contenute, come si può vedere dalla Foto n°8.

3-5-1 - Modello-forma in cartone.

Prima di procedere alla costruzione definitiva, abbiamo realizzato un modello di massima in cartone da modellistica, sempre in scala 1:5; per farlo, abbiamo disegnato su carta bianca la sagoma dei pezzi e con essa come guida abbiamo ritagliato i pezzi di cartone.

I vari pezzi sono poi stati montati assieme mediante nastro adesivo in modo che durante il montaggio affiorassero tutte le incompatibilità dimensionali (dovute ad errori) fra i pezzi stessi: è stato necessario rifare molti pezzi.

Quando il modello in cartone è stato ultimato, abbiamo provveduto a riscomporlo in tutte le sue parti, che sarebbero servite poi come masche-

rine per il taglio delle parti in Perspex e in alluminio.

3-5-2 - Taglio e assemblaggio del Perspex.

Visto il piccolo spessore del Perspex simulante l'acciaio, il taglio di queste parti è stato effettuato con una lama affilata, seguendo i contorni del pezzo in cartone corrispondente.

Qualche problema c'è stato nelle giunzioni ad angolo fra lastrine così sottili, poiché i lati non combaciavano mai perfettamente; dopo un primo fissaggio con Bostik 800 abbiamo pertanto provveduto a ripassare tutte le giunzioni con un cordone di Loctite.

Le parti simulanti i vetri, invece, essendo di spessore maggiore (3 mm.) sono state tagliate in parte con il seghetto da ferro, in parte con una sottilissima mola, ruotante sul mandrino di

un trapano flessibile.

Il fissaggio dei vetri non ha creato problemi, viste le eccezionali doti di viscosità del silicone acetico.

Sono state realizzate due strutture scatolari per il tetto della cabina, una in Perspex, l'altra in alluminio. Si è deciso quindi di montare quella in Perspex, poiché quella in alluminio era troppo pesante e avrebbe falsato il comportamento oscillatorio rigido del tetto sui montanti elastici.

Tutte le bombature e le nervature sono state simulate incollando sulla piastra piatta di fondo dei listelli o delle placche di rinforzo in Perspex (vedi Foto n°9).

Gli attacchi inferiori della cabina sono stati riprodotti nella caratteristica forma scatolare (vedi Foto nn. 10 e 11).

Foto 9

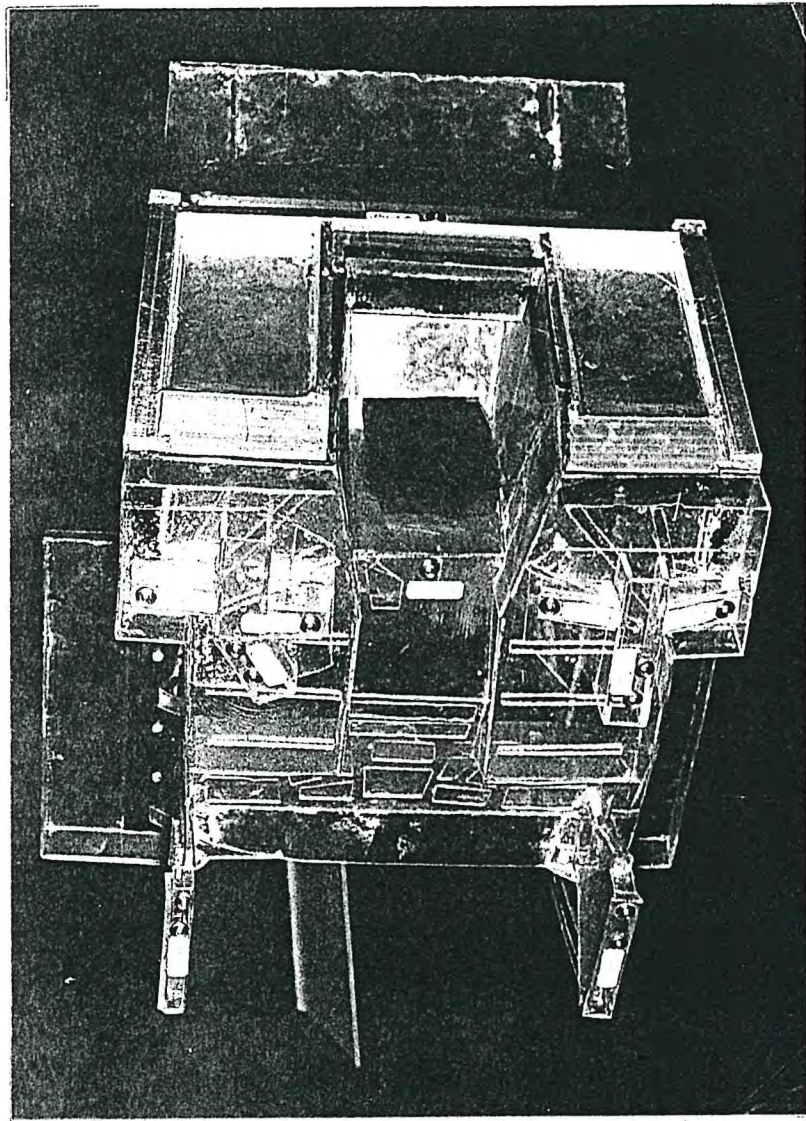


Foto 10

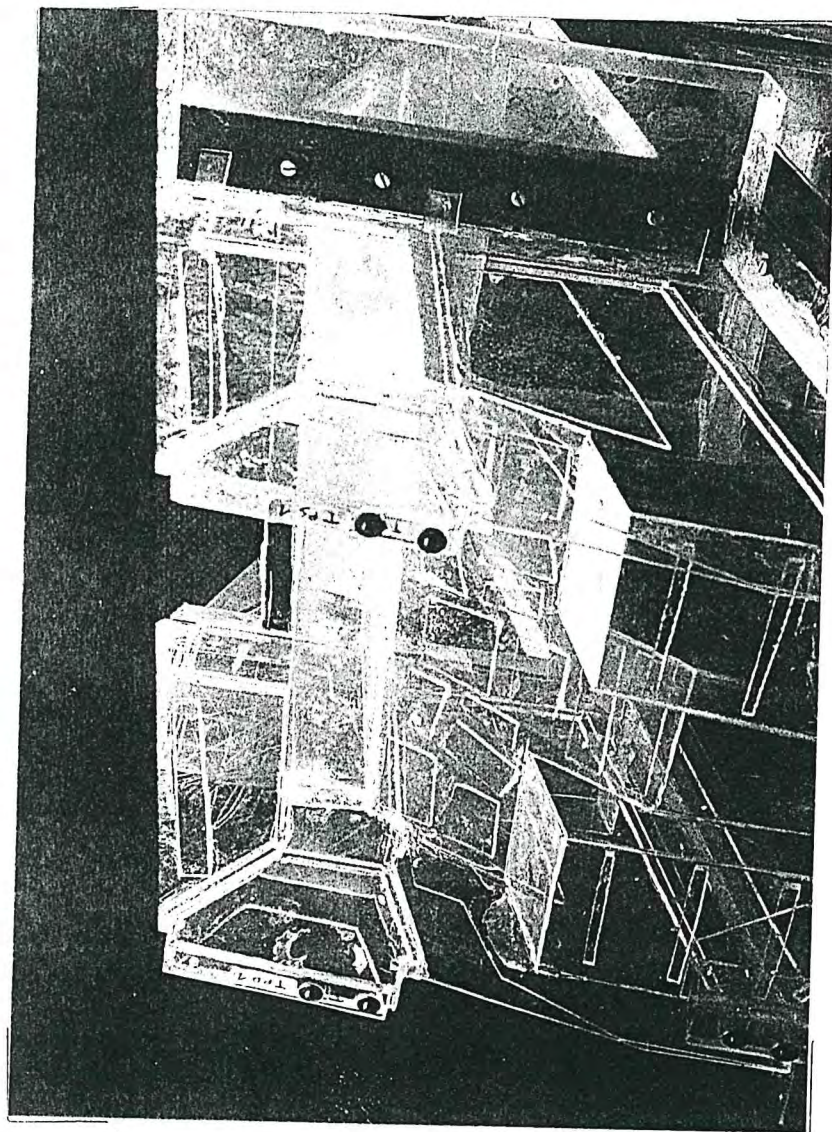
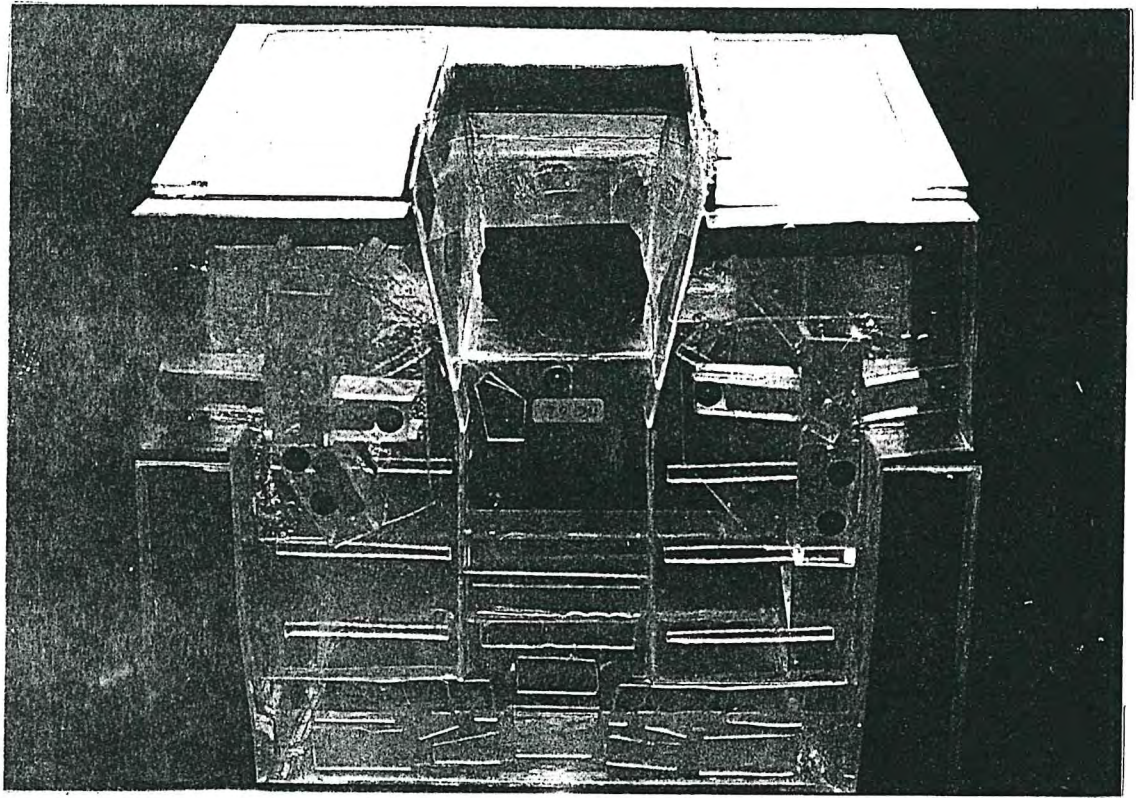


Foto 11



3-5-3 - Taglio e assemblaggio dell'alluminio.

Le parti di alluminio sono state tagliate e sagomate con il seghetto da ferro e rifinite con la mola da banco.

Il problema del fissaggio delle parti di alluminio tra loro è risultato il più ostico. Infatti nessun tipo di saldatura era praticabile a contatto con il Perspex e gli incollaggi, effettuati con Loctite, certamente compromettono la continuità strutturale.

Nonostante ciò, restando lontani i limiti del comportamento elastico-lineare del cianoacrilato, si può supporre che la linearità di risposta del sistema non venga compromessa, e ciò infatti è stato poi riscontrato.

Le placchette per il fissaggio degli accelerometri sono state fissate con Loctite (sull'alluminio) e con Bostik 800 (sul Perspex).

3-6 - MISURE DI RAFFRONTO FRA IL PROTOTIPO ED IL MODELLO

Il prototipo della cabina di sicurezza si trovava presso i laboratori della Italiana Keller a Santhià. Ci è stato gentilmente concesso l'uso del medesimo laboratorio, nonché la disponibilità di due tecnici, per un periodo di tre giorni, onde poter effettuare le prove sia sul prototipo che sul modello.

L'Italiana Keller è un'industria chimica che produce, fra l'altro, materiali di rivestimento ed insonorizzazione per l'abitacolo dei veicoli. Ovviamente essa provvede alla prova dal vero dei propri prodotti, installandoli su prototipi dei veicoli da insonorizzare.

Esistono tre meccanismi diversi di funzionamento dei prodotti da rivestimento:

- azione smorzante delle vibrazioni (fattori di perdita);

- azione fono-isolante (legge di massa);
- azione fono-assorbente (coefficiente di assorbimento apparente).

Per la verifica della prima caratteristica, esistono apparati di misura del fattore di perdita, che agiscono per confronto fra una lastrina metallica nuda e una lastrina identica rivestita del materiale in prova.

Questa apparecchiatura non era utile nel nostro caso, poiché sia il prototipo che il modello erano privi di alcun tipo di rivestimento.

Per la verifica del potere fono-isolante esisteva un apparecchio denominato "bazooka", funzionante con il principio del tubo di Kundt nel quale però la lastra di materiale in prova era interposta fra l'altoparlante ed il microfono: anche questo apparecchio non è stato utile nel nostro caso.

La verifica del potere fono-assorbente poteva essere effettuata sempre col tubo di Kundt, oppure

in una piccola camera riverberante.

Oltre a queste apparecchiature, specifiche per la produzione della Italiana Keller, esiste un laboratorio di rilevamento della rumorosità prodotta dai veicoli, costituito da un camera anecoica dotata di banco a rulli, nella quale far marciare i veicoli in prova.

Infine esiste una sala dotata dell'unità di rilevamento delle funzioni di trasferimento, nella quale gli abitacoli vengono sottoposti anche a prove per la determinazione della funzione di risposta in frequenza.

Lo scopo è sempre quello di confrontare il comportamento dell'abitacolo nudo con quello dell'abitacolo dotato di rivestimento fono-assorbente.

3-6-1 - La strumentazione.

Nel nostro caso, essendo le nostre due cabine, prototipo e modello, sprovviste di fonti interne autonome di rumore (motore, trasmissione, ruote), non restava che sollecitarle esternamente, con un martello e valutare poi le funzioni di trasferimento e di risposta in frequenza.

Dunque ci siamo serviti dell'ultima apparecchiatura descritta al punto precedente e di cui uno schema è visibile in Figura 20. L'intero apparato è controllato da due elaboratori HP 2119 MX-E, [14], con differente dotazione di memoria; solitamente uno viene usato per l'acquisizione dei dati, l'altro, che funziona in multiprogrammazione, per l'elaborazione e la stampa dei medesimi (vedi Foto 12).

Oltre al programma acquisizione dati, erano a disposizione numerosi programmi di biblioteca per effettuare l'analisi modale, per visualizzare

SISTEMA DI ACQUISIZIONE ED ELABORAZIONE DI SEGNALE ACUSTICI E VIBRATORI ITALIANA KELLER - SANTINA'

N. PECCHIOLI 01-10-1981

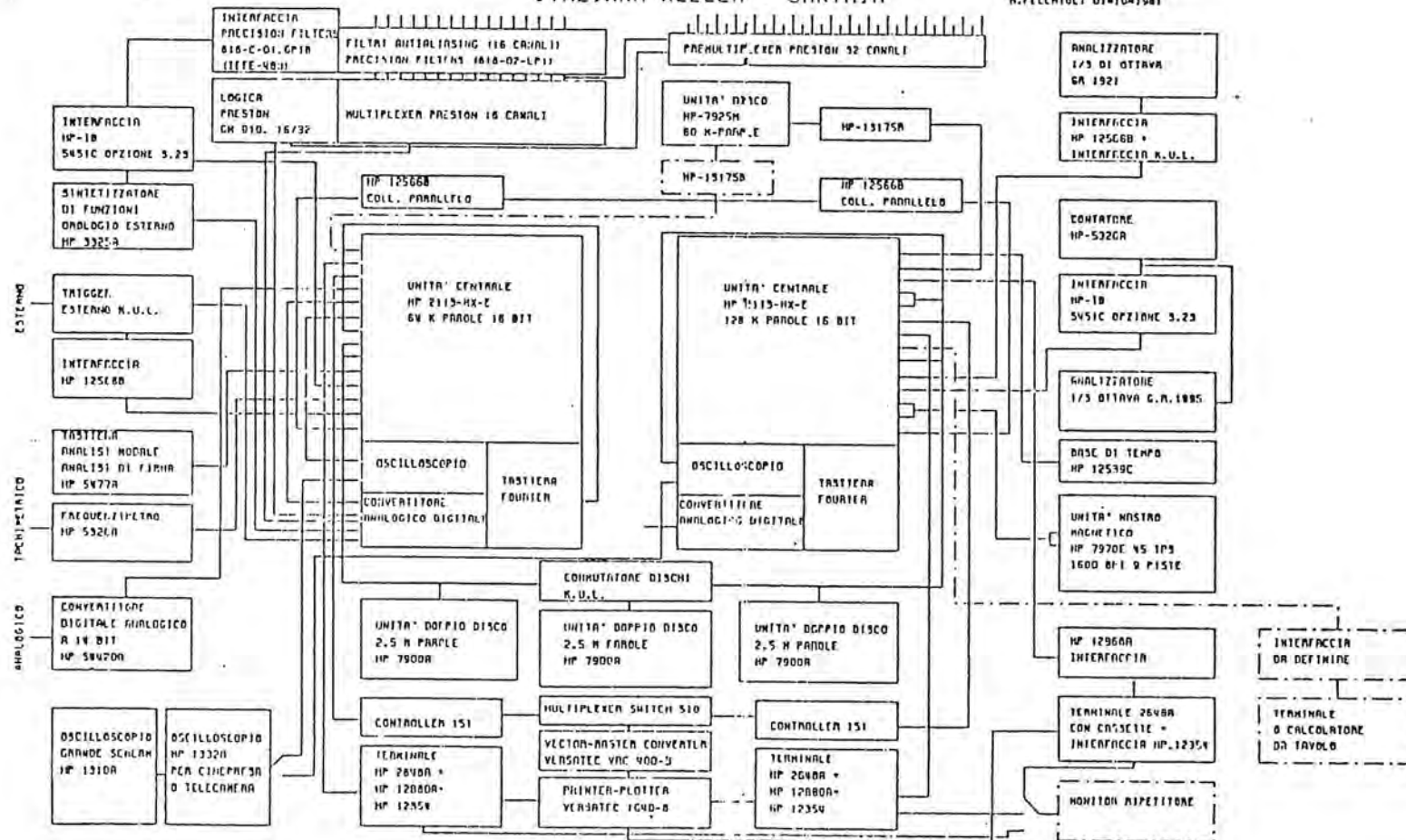
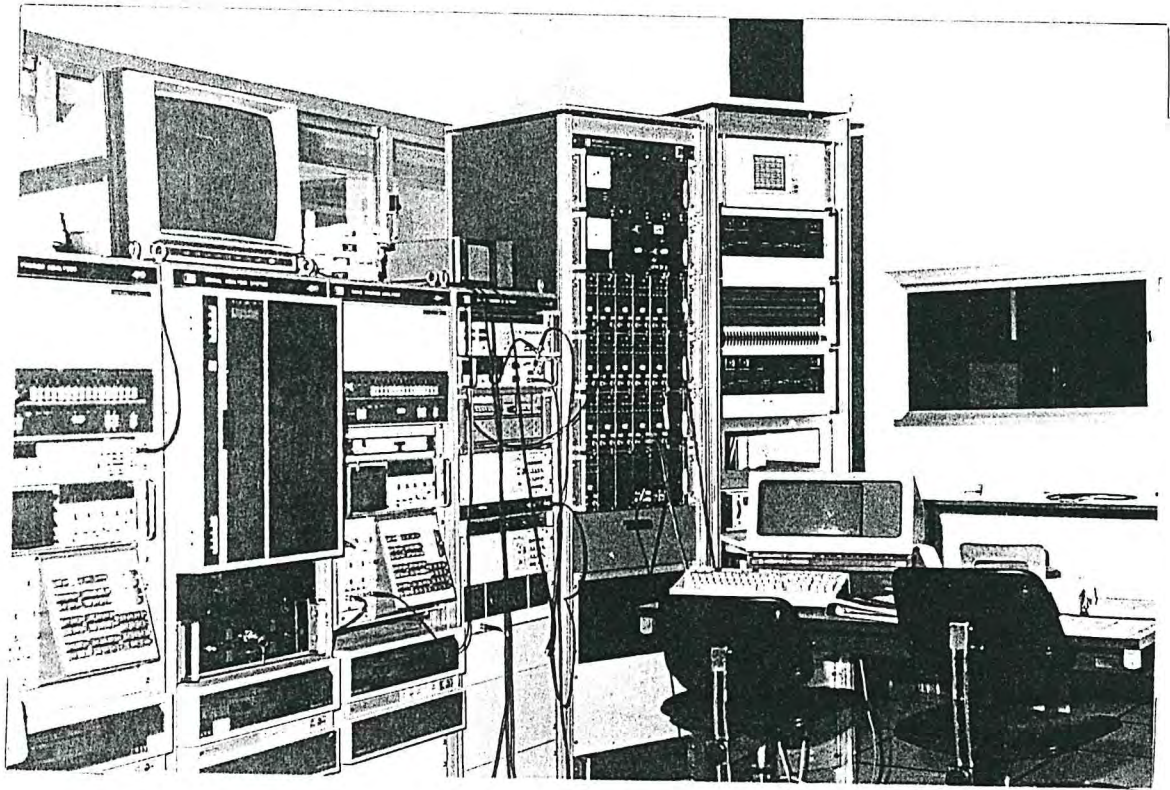


Fig. 20

Foto 12



su schermo a grafica vettoriale (vedi Foto 13), il movimento dei punti della struttura, ecc.

In tutto erano disponibili tre terminali grafici HP ed a noi ne è stato assegnato uno; contemporaneamente alle nostre venivano eseguite anche misure da parte di un gruppo di ricercatori francesi, nonché prove su di un motore FIAT 132-2000.

Nella sala misure (vedi Foto n°14) era collocata l'unità di ingresso segnali, dotata di 16 canali; il primo canale è sempre collegato alla cella di forza del martello (B & K TYPE n°8200) ed il sistema processa tutti gli altri segnali misurando le fasi in base a questo primo segnale.

Agli altri canali possono venire collegati indifferentemente celle di forza, accelerometri o microfoni a patto di regolare in modo adatto a ciascun rilevatore la sensibilità del preamplificatore d'ingresso di ogni canale.

Il segnale analogico proveniente dai preampli-

Foto 13

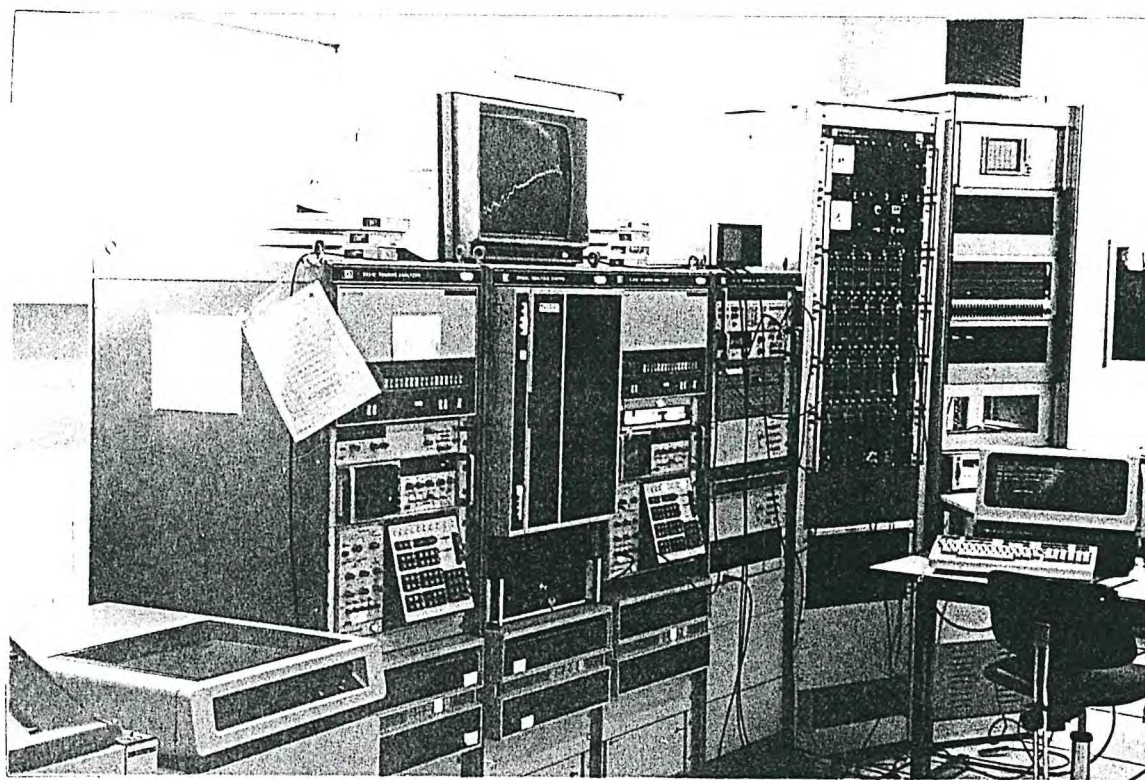
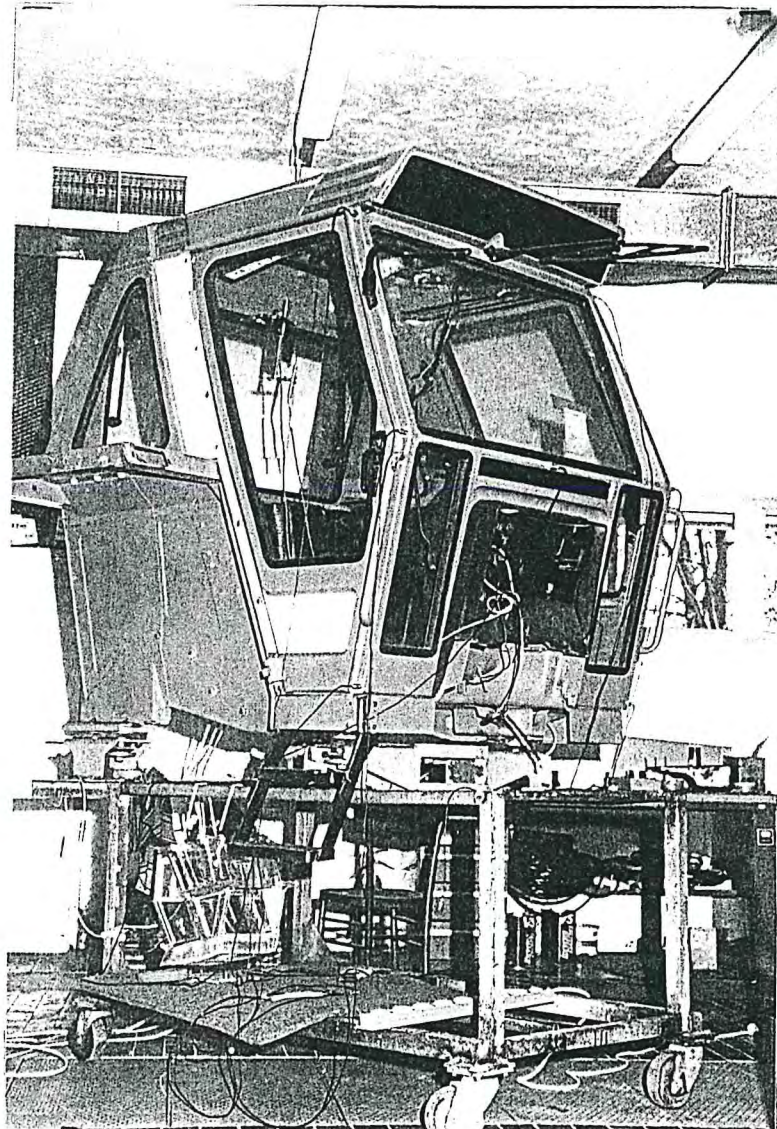


Foto 14



ficatori attraversa una serie di filtri, viene quindi digitalizzato ed inviato al multiplexer, nel quale i 16 canali vengono inviati su un unico canale veloce del computer, uno in coda all'altro. Su di un altro canale veloce è possibile far entrare, contemporaneamente, segnali provenienti da altri apparecchi (contagiri, manometri, termometri, ecc.). I segnali vengono immediatamente memorizzati su disco, sotto forma di "blocchi" di 1028 punti, corrispondenti, in tempo reale, a 0.5 secondi. Al termine dell'intervallo di tempo di acquisizione (0.5 secondi circa), il computer rilegge uno alla volta i segnali del disco, ne fa la trasformata di Fourier e li rinserisce sul disco stesso, sempre nella forma di blocchi di 1028 punti. Siccome l'analizzatore di Fourier è pilotato da un generatore di onde quadre di 2048 Hz, si ottiene una risoluzione di circa 2 Hz.

In realtà il segnale del canale 1 viene continuamente letto; non appena esso supera un certo

valore di soglia (segno che la martellata è iniziata), scatta il meccanismo di acquisizione e nel successivo $\frac{1}{2}$ secondo vengono letti tutti i canali. Subito prima di effettuare l'analisi di Fourier il computer controlla che nessun canale fosse stato sovraccaricato. Una volta terminate le acquisizioni, la massa di dati ottenuta può essere passata facilmente all'altro computer, destinato all'elaborazione ed alla stampa, con il semplice scambio delle unità disco ad essi collegate. Qualora si voglia sgombrare i dischi, al termine delle misure, tutti i dati ottenuti vengono registrati su di un nastro magnetico.

La stampa dei risultati avviene su printer-plotter versatec 1640, che permette, oltre ai grafici, di stampare scritte in entrambe le direzioni, anche con caratteri greci ed in numerose grandezze e spaziature.

La stessa Figura 20, ad esempio, è stata pro-

dotta dalla stampante suddetta.

Al sistema sono connessi molti altri apparecchi, che non abbiamo usato, quali un analizzatore gen rad 1921 in terzi di ottava, un dispositivo per la lettura in tempo reale del numero di giri dei motori, nonché una gigantesca unità a disco multiplo da 10 M parole non indicata nella Figura 20, ma che si può osservare in basso a sinistra nella Foto 13.

3-6-2 - Le acquisizioni.

Per le misure abbiamo utilizzato due microfoni preamplificatori B & K type n°4169, otto accelerometri B & K type n°4366 ed un miniaccelerometro B & K type n°4344, quest'ultimo usato sul modello per la sua massa ridotta.

I due microfoni sono stati collocati ai canali 2 e 3 del Multiplexer e le loro posizioni sono

state individuate dai simboli Mic 2 e Mic 3. Essi sono stati collocati in prossimità delle orecchie del guidatore, come mostra la Foto n°15.

All'interno del sistema di elaborazione ogni segnale rilevato doveva infatti essere contraddistinto da una sigla di 4 caratteri, di cui l'ultimo numerico. Sono poi stati scelti sulla struttura 30 punti di rilevamento dei quali 4 (in corrispondenza degli attacchi ai silent blocks) sono serviti anche come punti di sollecitazione.

La posizione e la nomenclatura di questi punti è visibile nelle Figure 21 e 22.

Sul modello, essendo disponibile un solo accelerometro è stato necessario eseguire un numero molto maggiore di misure ed è stato sfruttato il principio di reciprocità, per cui la funzione di trasferimento da un punto A ad un punto B è identica a quella dal punto B al punto A. Pertanto si è proceduto a picchiare la struttura nei punti

Foto 15

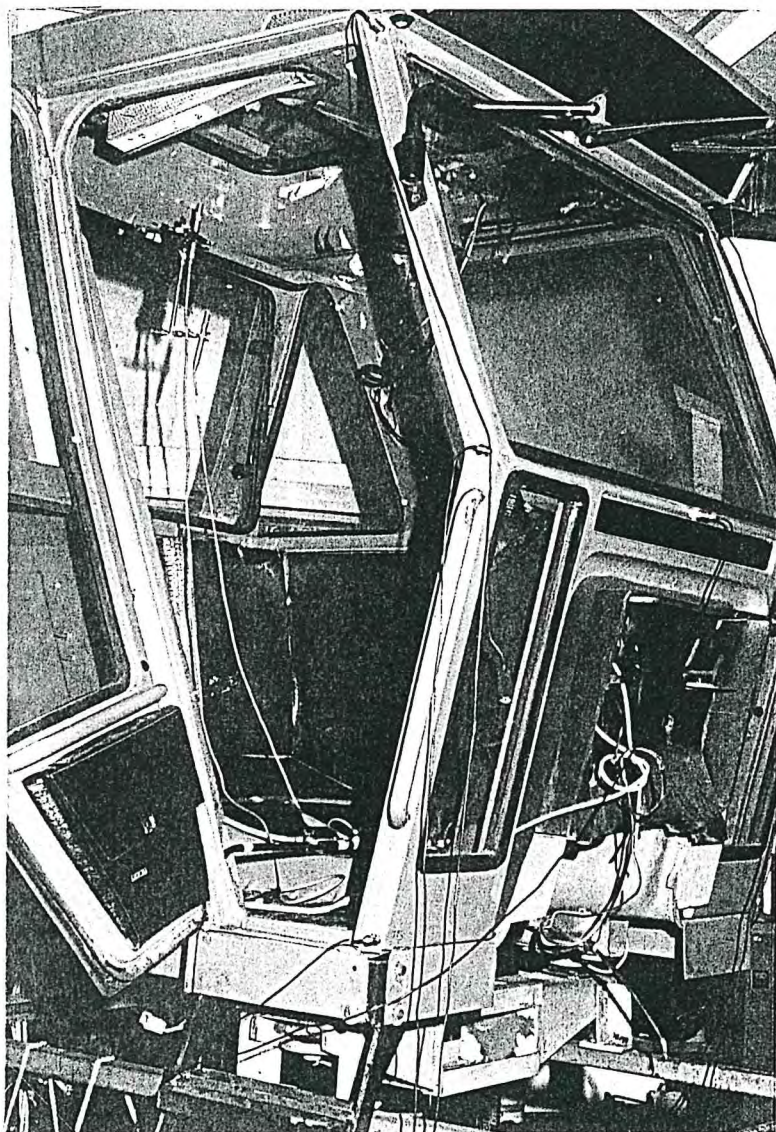


Fig. 21 - Posizione dei punti di rilevamento .

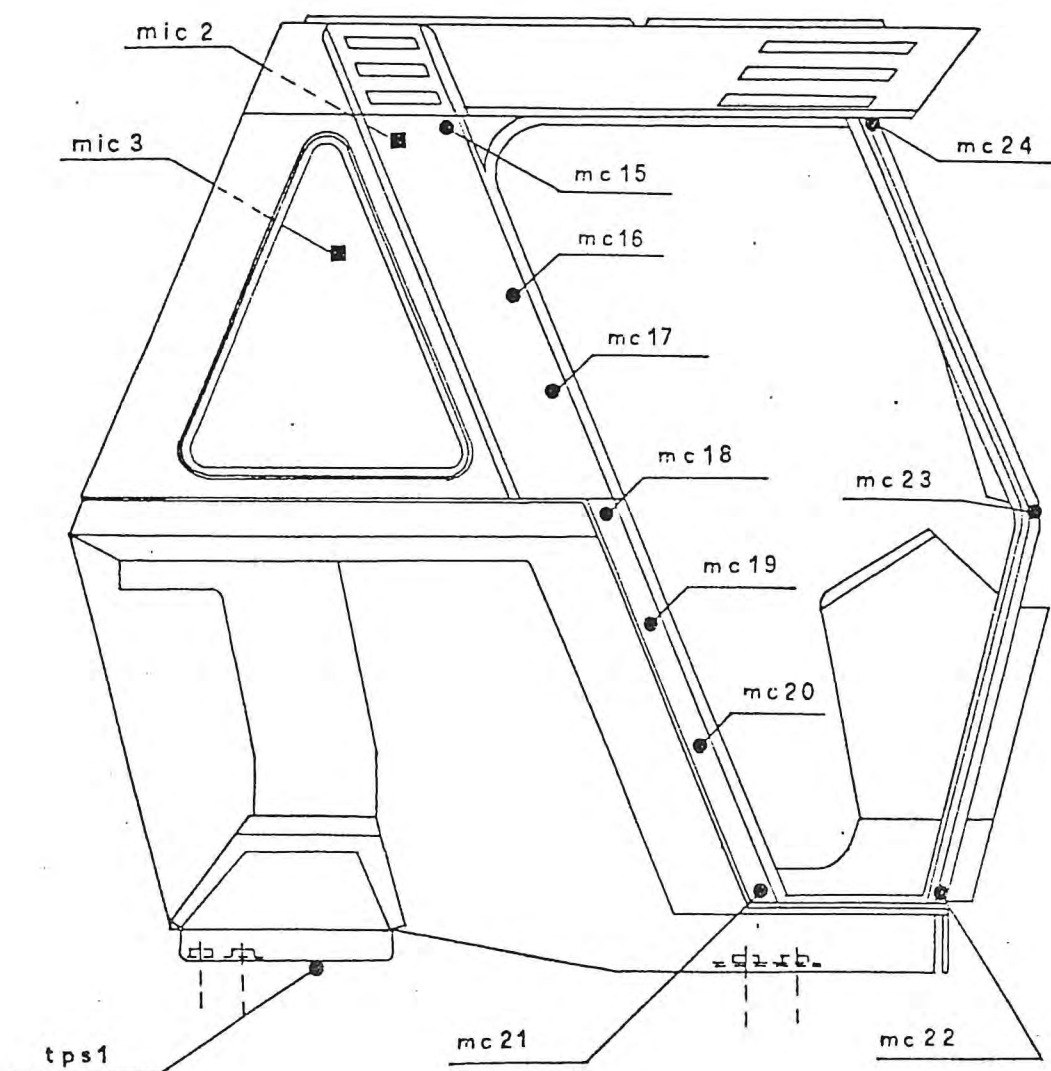
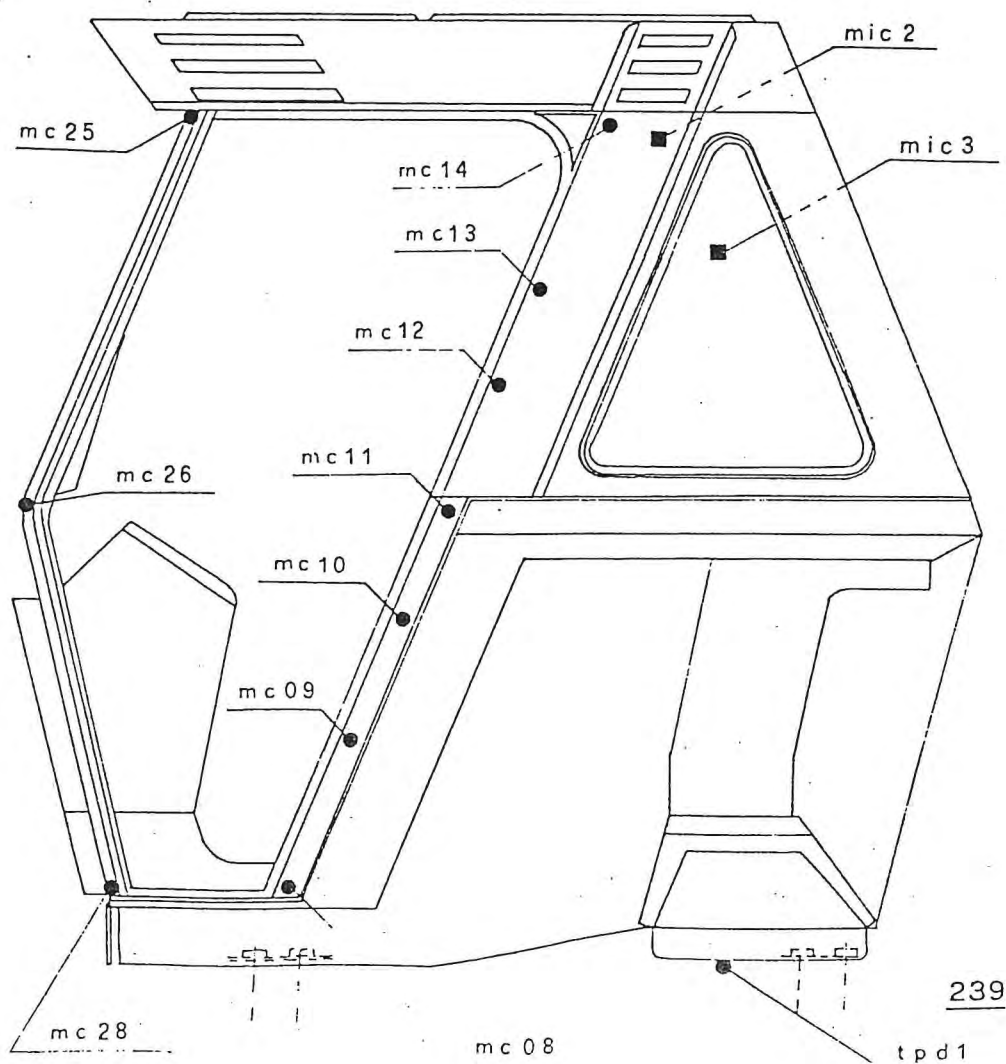
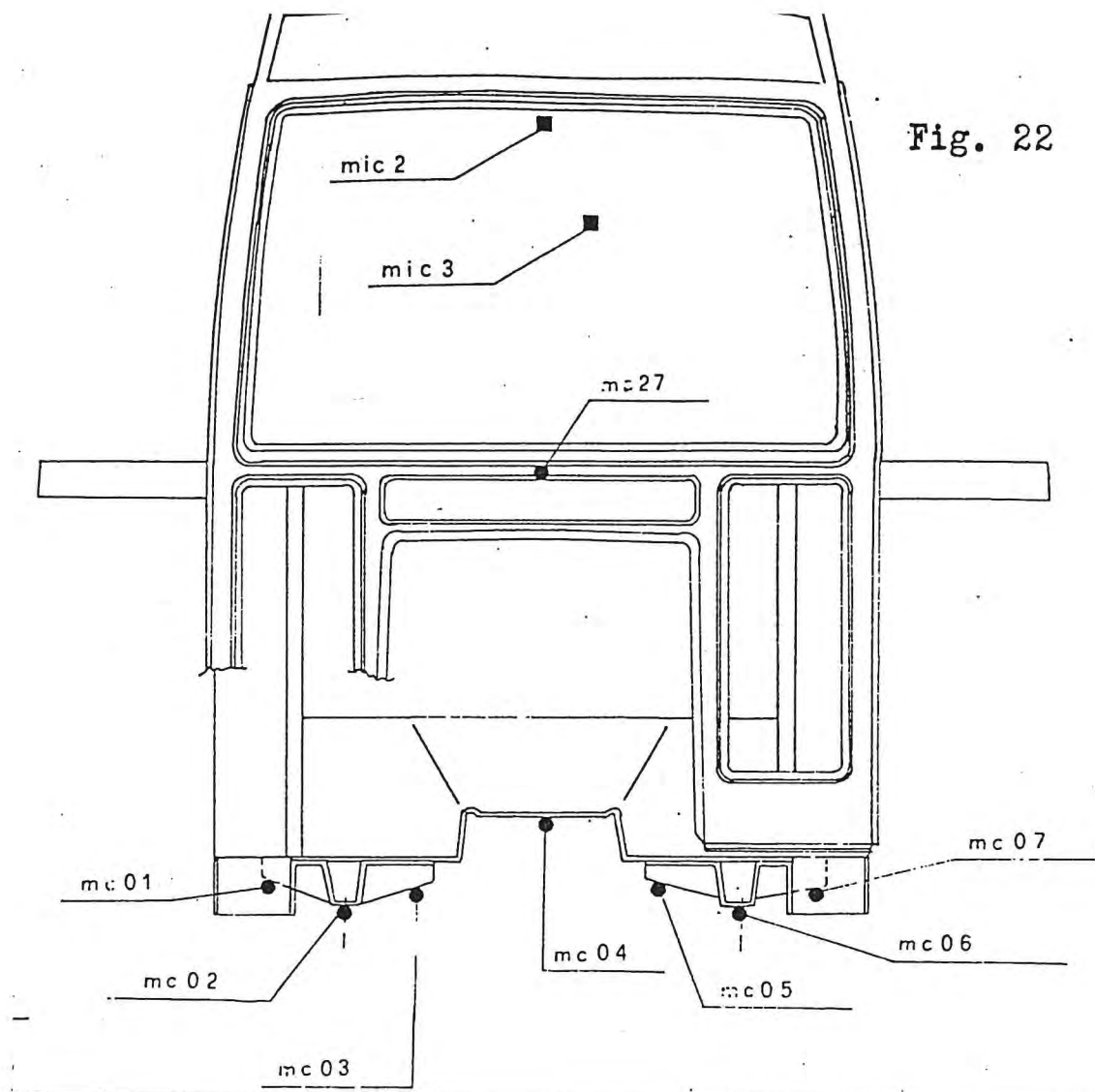


Fig. 22



di rilevamento, piazzando l'accelerometro successivamente nei 4 punti di sollecitazione.

L'uso del martello di eccitazione è risultato più difficile di quanto le apparenze lascino supporre: infatti, se non si sta attenti, è facile che il martello rimbalzi e colpisca due volte, a breve intervallo di tempo, la struttura. Questo è un cosiddetto "colpo doppio", che rende inservibile la singola misura.

Per accelerare i tempi di misurazione, abbiamo deciso di ripetere ogni misura in serie di 5 colpi; con un numero così basso, è sufficiente un colpo doppio su 5 per dover ripetere integralmente la serie.

D'altronde non era possibile eliminare la singola misura! O si elimina la serie dei 5 colpi o la si accetta per intero (questo a nostro avviso è un difetto del sistema di acquisizione dati). Ogni volta che si colpisce la struttura, su di

un oscilloscopio incorporato nel computer si vede il tracciato del segnale proveniente dal martello e così è possibile accorgersi se qualche colpo è doppio.

Purtroppo però non viene visualizzato il tracciato relativo all'ultimo colpo della serie, per cui, se l'ultimo colpo è sbagliato, non ci si accorge di ciò.

Il sistema, comunque, oltre che la funzione di trasferimento, valuta anche la funzione di coerenza media delle 5 misure effettuate *(4) e ciò

*(4) - Funzione di coerenza.

Dopo ogni martellata, abbiamo 2 spettri nel tempo, quello della eccitazione (martello) e quello della risposta (microfono); partendo da questi 2 spettri, che chiameremo $x(t)$ e $y(t)$ viene calcolata la funzione incrociata di densità spettrale, $G_{xy}(f)$, definita per ogni intervallo di frequenza Δf come la media, sull'intero tempo T dell'acquisizione, del prodotto $x \cdot y$.

La funzione G_{xy} è però una grandezza complessa, poiché in generale i 2 segnali x e y sono sfasati; possiamo scrivere per la parte reale:

permette dopo ogni serie di decidere se scartarla e ripeterla oppure accettarla e memorizzarla su disco.

$$[G_{xy}(f)]_R = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t, f, \Delta f) \cdot y(t, f, \Delta f) dt \right]$$

nella quale $x(t, f, \Delta f)$ e $y(t, f, \Delta f)$, sono gli ipotetici segnali che uscirebbero da un filtro a banda stretta di frequenza media f e ampiezza Δf .

La parte immaginaria ha invece questa espressione:

$$[G_{xy}(f)]_i = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t, f, \Delta f) \cdot y(t+t^*, f, \Delta f) dt \right]$$

nella quale il segnale y viene sfasato rispetto al segnale x di 90° mediante l'aggiunta di $t^* = 1/4f$.

Analogamente a questa funzione, possono essere calcolate le 2 funzioni singole di densità spettrale: esse hanno forma analoga solo che all'interno dell'integrale al posto del prodotto $x \cdot y$ compaiono i quadrati x^2 e y^2 ; chiameremo $G_y(f)$ e $G_x(f)$ queste nuove funzioni.

A questo punto siamo in grado di confrontare, frequenza per frequenza, la densità spettrale dei singoli segnali, con la densità spettrale incrociata, mediante questo parametro:

$$y_{xy}^2(f) = \frac{[G_{xy}(f)]_R^2 + [G_{xy}(f)]_i^2}{G_x(f) \cdot G_y(f)}$$

Seri problemi ha creato, sul modello, il dosaggio della forza con cui percuotere la struttura. Infatti, se il colpo è troppo forte, si manda facilmente in sovraccarico il preamplificatore del segnale in ingresso, oppure il convertitore analogico digitale di quel canale.

Ecco che, a secondo del punto da percuotere e del materiale di cui esso è costituito (alluminio o Perspex) è necessario variare parecchio

che è chiamato appunto funzione di coerenza ed è sempre ≤ 1 .

Quando $\gamma_{xy}^2(f) = 0$, ciò significa che a quella frequenza non c'è alcun legame fra il segnale in ingresso ed il segnale in uscita, cioè non ha alcun senso fare il rapporto e dire che esso è la funzione di risposta in frequenza. Viceversa il valore 1 significa perfetta proporzionalità fra il segnale di ingresso e quello in uscita. Sebbene teoricamente è sempre $\gamma_{xy}^2 \leq 1$, in certi casi il valore numerico del rapporto, in seguito agli errori di troncamento, arrotondamento, ecc., del sistema di calcolo, può superare seppure di poco l'unità; in questo caso, la funzione di coerenza stampata sui grafici viene ridotta in scala 1:2, e si nota una linea quasi prossima al valore 0.5.

l'altezza di caduta del martello.

Ciò è stato causa di un'ulteriore perdita di tempo e ci ha costretto a ripetere varie volte la stessa serie di misure, cambiando l'operatore al martello, la testina dello stesso, la regolazione della soglia del preamplificatore, ecc.

In pratica le acquisizioni hanno occupato il pomeriggio del primo giorno (la mattina è stata necessaria per preparare le cabine e l'attrezzatura di rilevamento) e l'intero secondo giorno dei 3 a nostra disposizione.

La cabina prototipo era montata su di un carrello, sospesa mediante i suoi silent blocks originali; per simulare il meglio possibile questa situazione, abbiamo appoggiato il modello su di un piccolo carrello portastrumenti, interponendo sotto gli attacchi inferiori blocchetti di neoprene.

La collocazione è visibile nella Foto n°16 ed in essa si vede pure il martello di percussione, con la relativa cella di forza e una delle tante testine accanto ad esso.

Quando è stato necessario percuotere la parte inferiore del modello esso è stato posto sui supporti rovesciato e percosso dall'alto al basso, come mostra la Foto n°17.

All'interno del prototipo i microfoni sono stati fissati con opportune staffe (vedi Foto 18) mentre all'interno del modello è stato usato un supporto snodato inserito fra il microfono ed il preamplificatore.

Il microfono ed il supporto snodato sono stati introdotti nell'abitacolo del modello attraverso un foro praticato nel cofano-motore, circa ove si sarebbe dovuta trovare la leva del cambio. Il bordo del foro è stato rivestito di neoprene, che ha la duplice funzione di sostenere il microfono

Foto 16

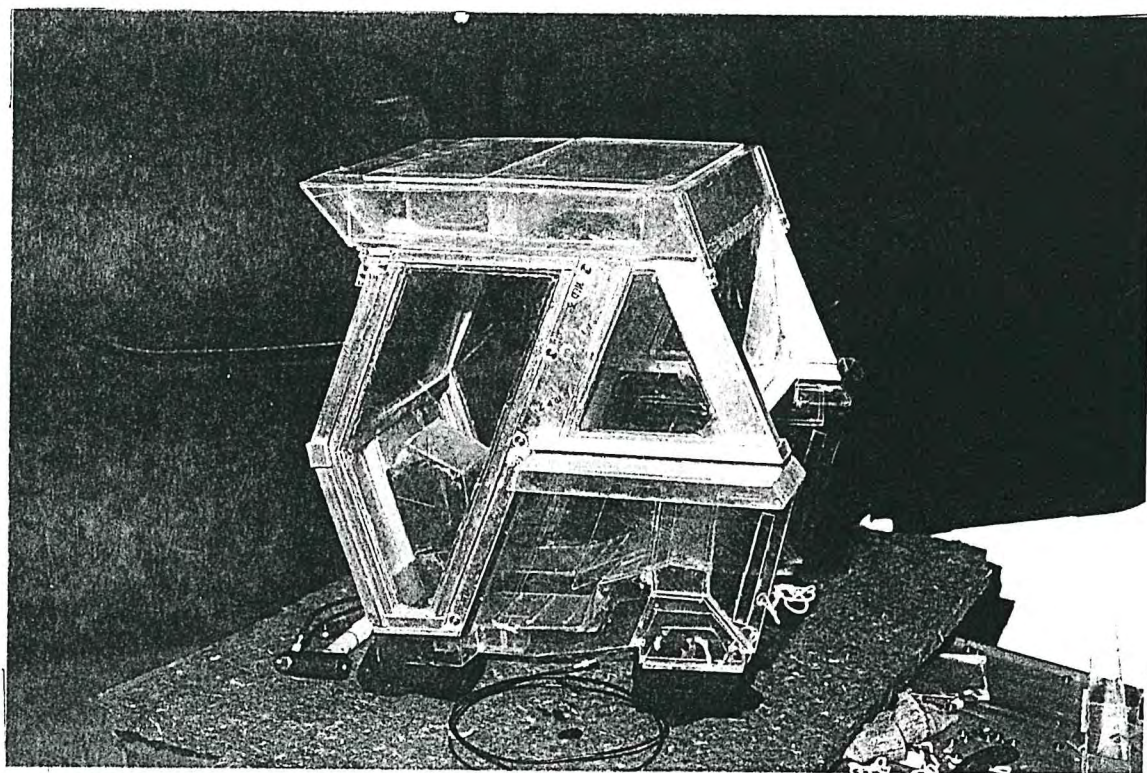


Foto 17

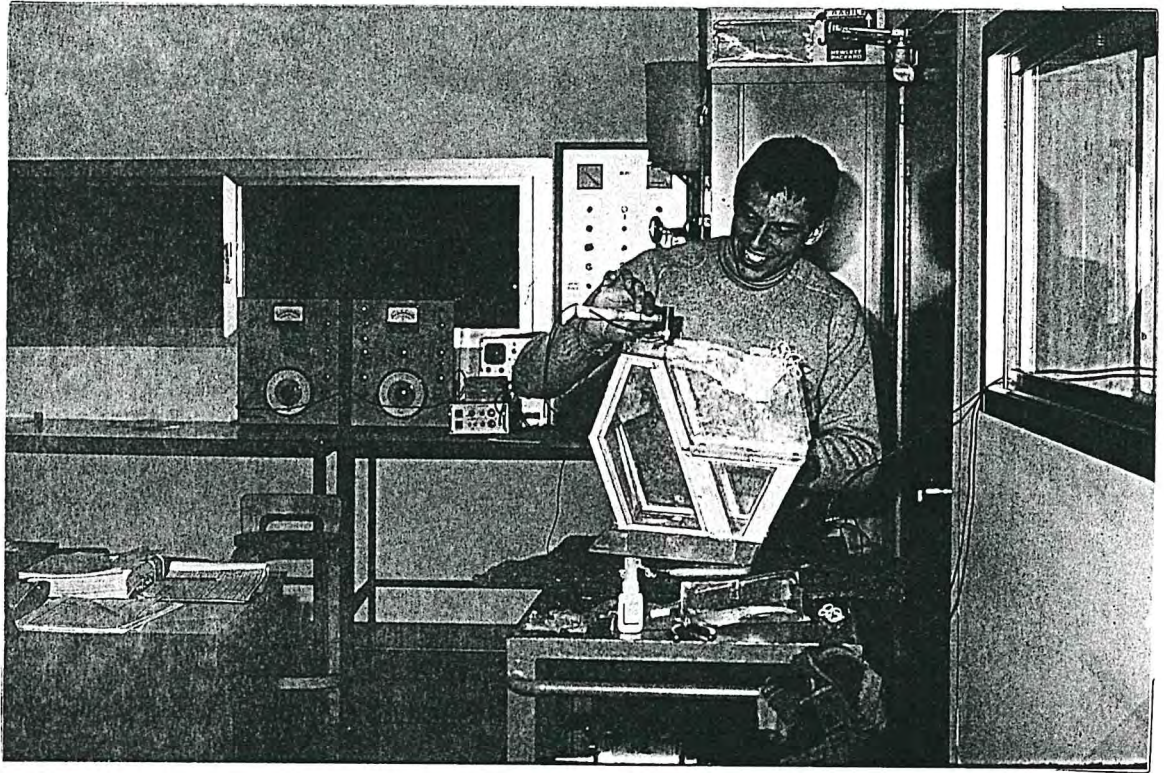
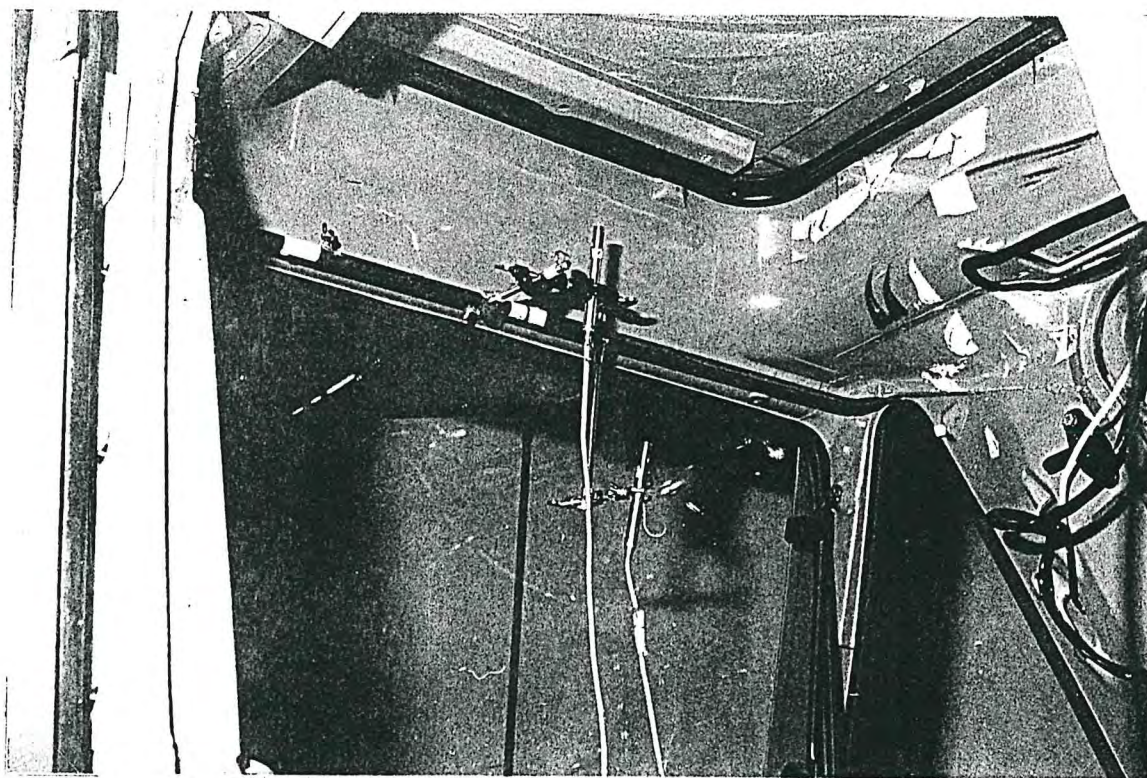


Foto 18



e nello stesso tempo evitare la trasmissione di vibrazioni allo stesso da parte della struttura.

Il blocco di neoprene forato suddetto è visibile al centro della Foto n°9.

3-6-3 - Elaborazione dei dati.

I risultati delle misure, costituiti da impulsi elettrici in funzione del tempo, sono stati memorizzati su disco magnetico durante le acquisizioni stesse.

Il terzo giorno è stato impiegato per l'elaborazione della massa di dati raccolta. Innanzitutto una parte dell'elaborazione era stata eseguita, in tempo reale, durante le misure stesse: si trattava dell'analisi di Fourier dei segnali in ingresso, passando dunque da impulsi in funzione del tempo ad ampiezze e fasi di segnali sinusoidali in funzione della frequenza.

L'intervallo della frequenza scelto è stato da 0 a 400 Hz per il prototipo e conseguentemente da 0 a 2000Hz per il modello. E' stato scelto un intervallo ristretto poiché così i tracciati non vengono compressi, lungo l'asse delle ascisse, in modo eccessivo ed in questo modo è possibile riconoscere lo slittamento in frequenza di certe risonanze.

Sempre in tempo reale è stato eseguito il rapporto, frequenza per frequenza, fra il segnale rilevato dai microfoni o dagli accelerometri ed il segnale di eccitazione del martello. In questo modo è stata ottenuta, da ogni accelerometro, la funzione di trasferimento fra il punto di eccitazione ed il punto di misura, mentre è stata ottenuta, da ogni microfono, la funzione di risposta in frequenza fra il punto di eccitazione ed il punto di ascolto.

Tutti questi dati si trovavano già su disco,

al termine delle misure, ma per ottenere la stampa dei grafici corrispondenti è stato necessario usare l'altro elaboratore, collegato alla stampante termica.

La stampante termica è molto precisa, però è piuttosto lenta e per produrre 72 grafici ha impiegato quasi un'ora. In pratica è stata eseguita la misura della funzione di trasferimento fra il punto MC-PC 06 e tutti gli altri (28 grafici); inoltre è stata ottenuta la funzione di risposta in frequenza fra i 4 punti di sollecitazione MC-PC 06, MC-PC 02, TPS 1, TPD 1 e i 2 microfoni (8 grafici), e tutto questo sia per il prototipo che per il modello.

Alcuni tracciati originali prodotti dal sistema di misura Keller sono visibili nelle Figure da 23 a 27. Qui riportiamo solo gli 8 tracciati delle funzioni di risposta in frequenza e 2 tracciati della funzione di trasferimento, dei quali

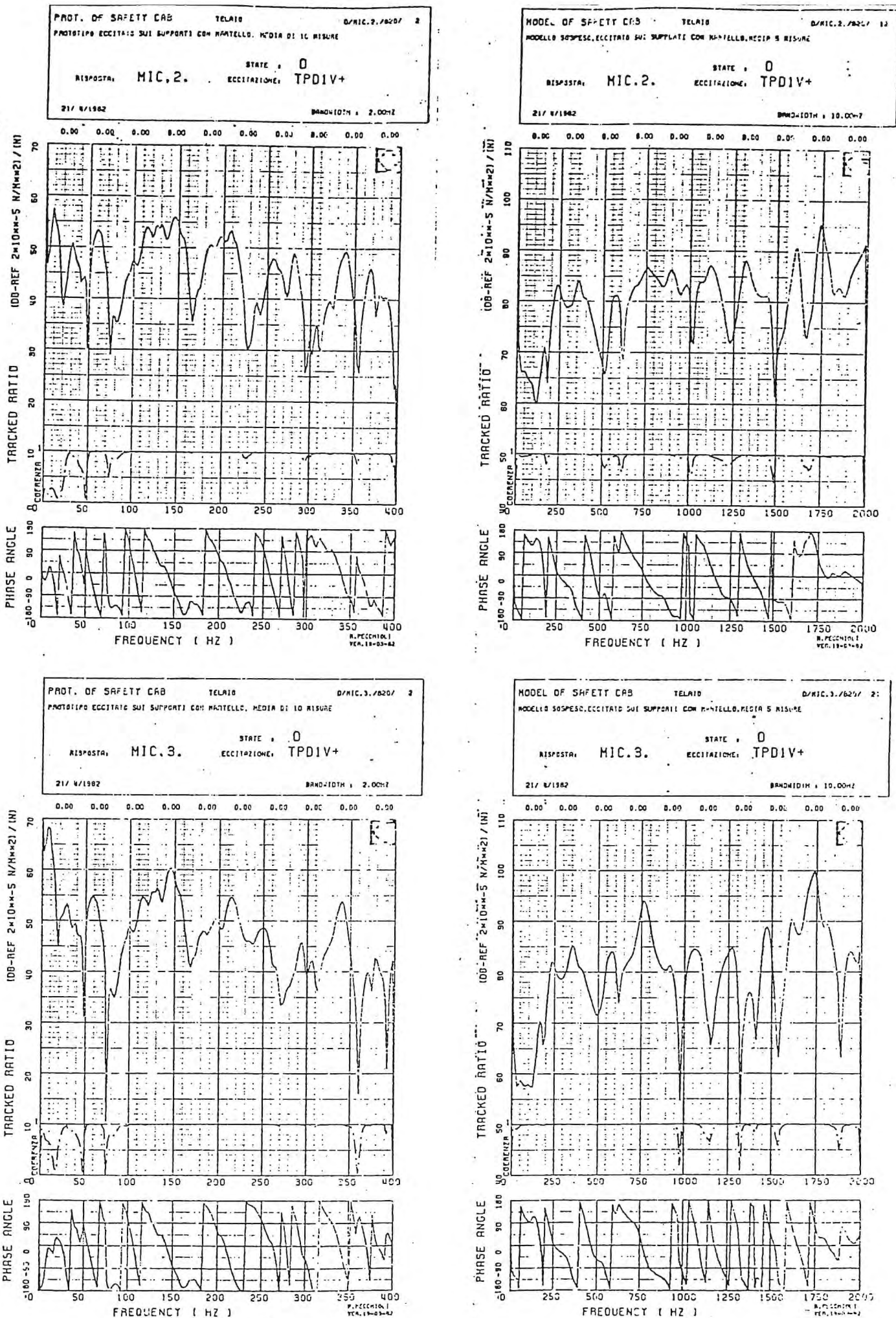


Fig. 23 - Funzioni di risposta in frequenza .

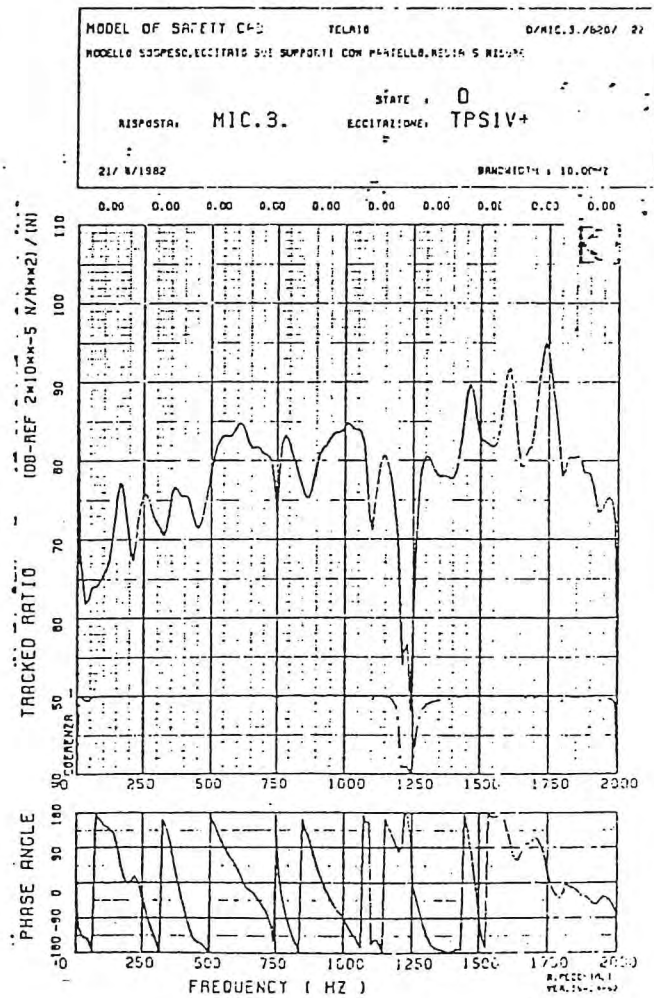
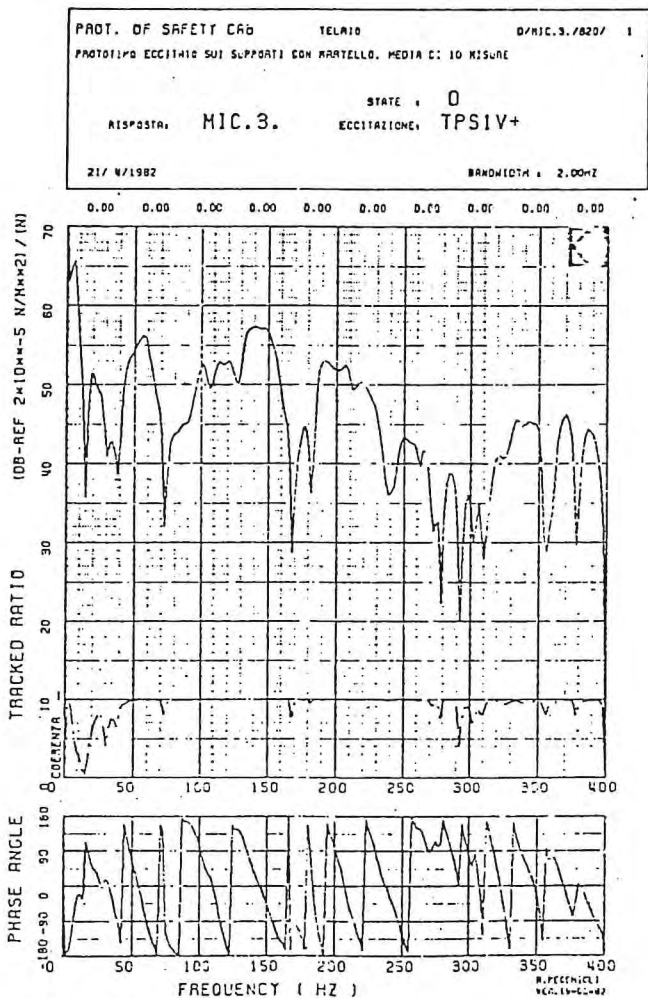
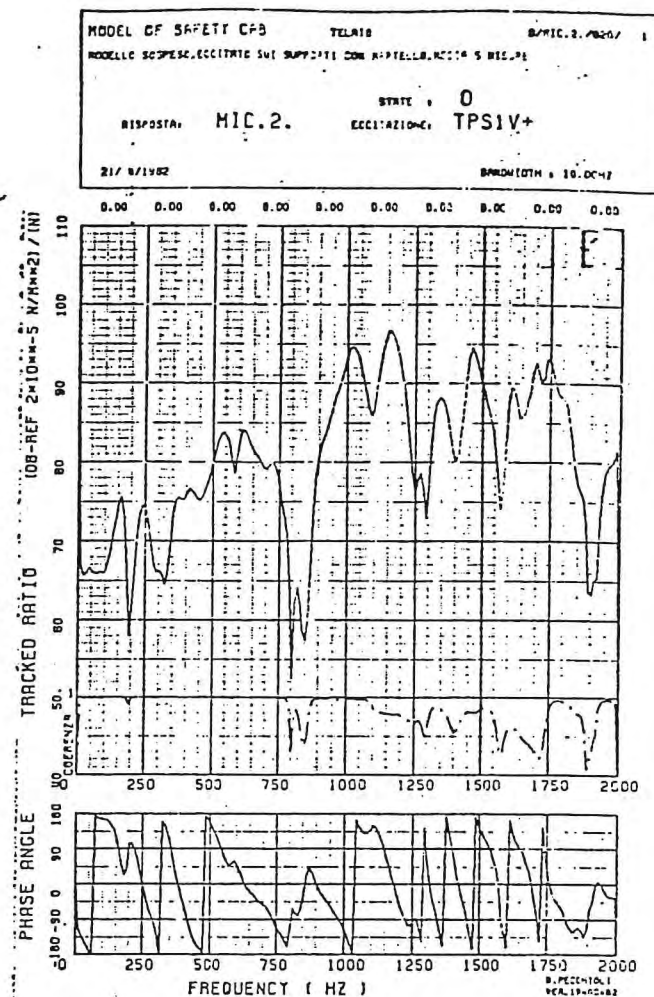
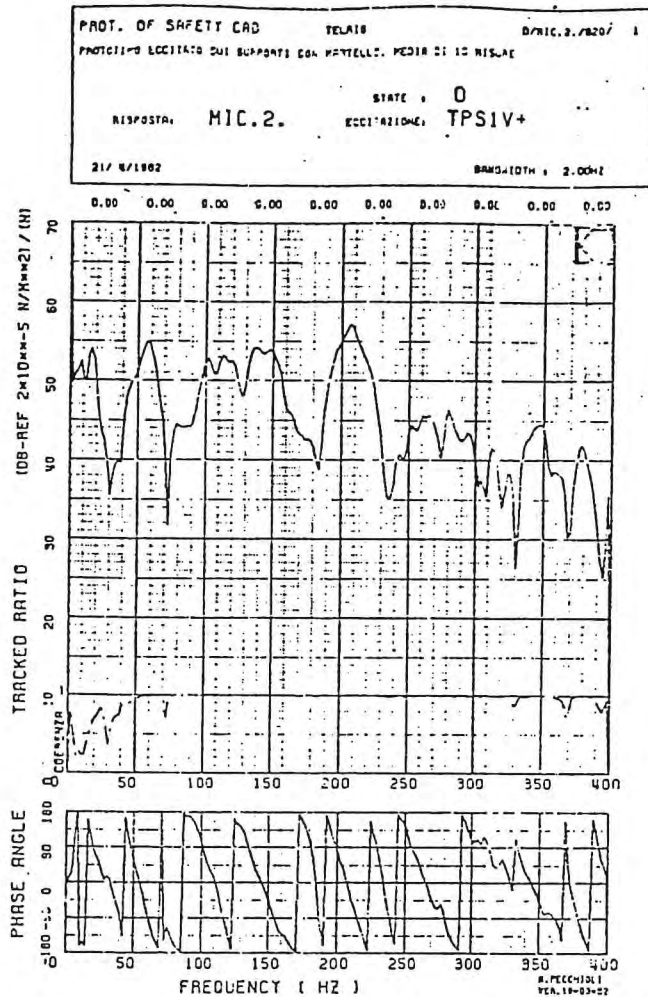


Fig. 24 - Funzioni di risposta in frequenza .

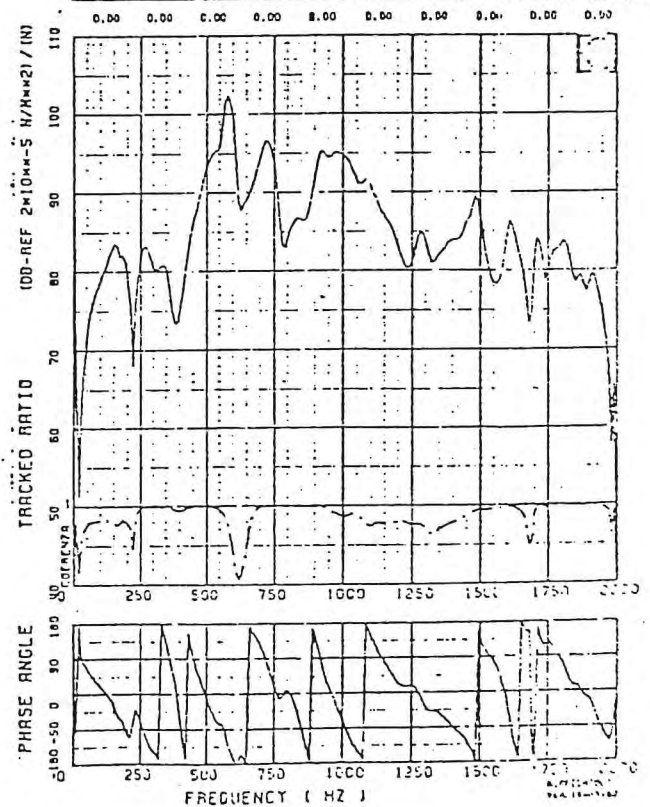
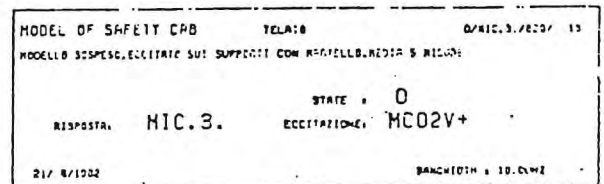
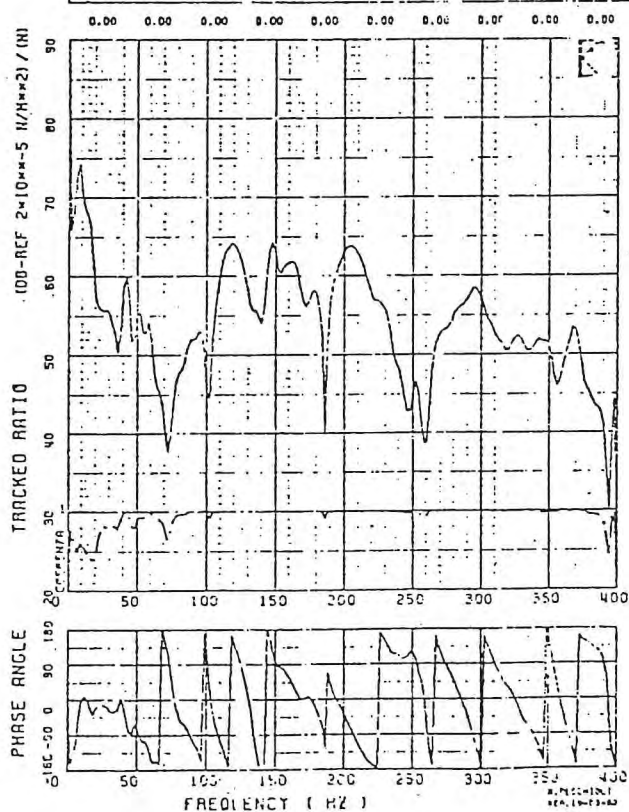
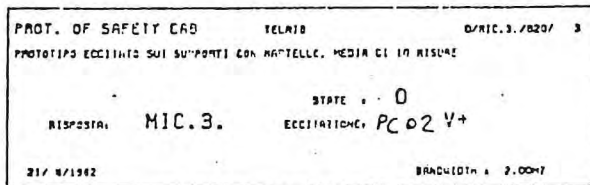
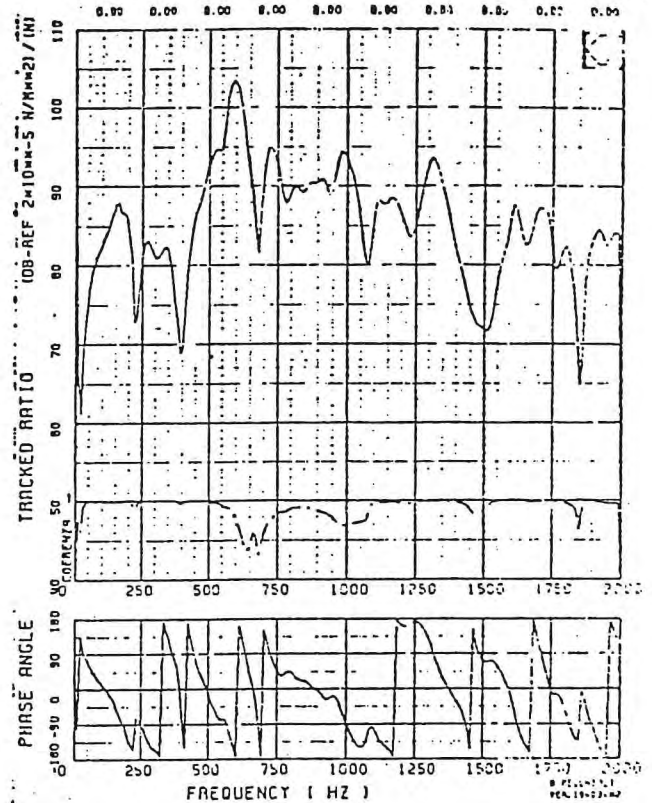
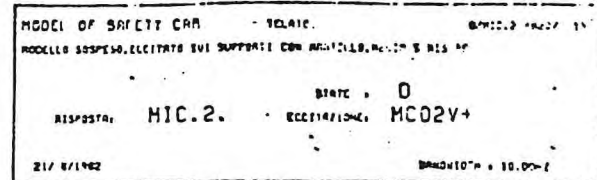
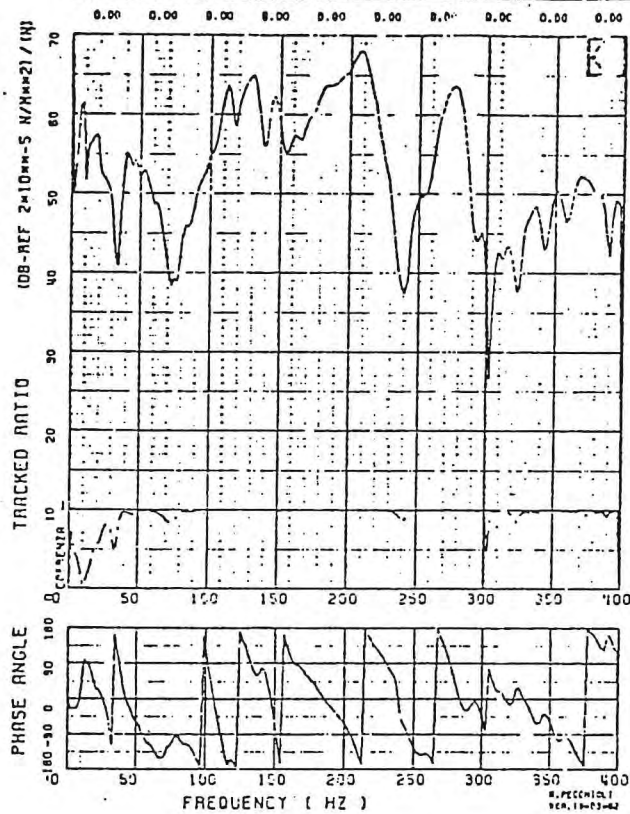
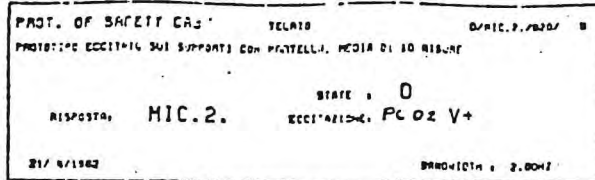


Fig. 25 - Funzioni di risposta in frequenza .

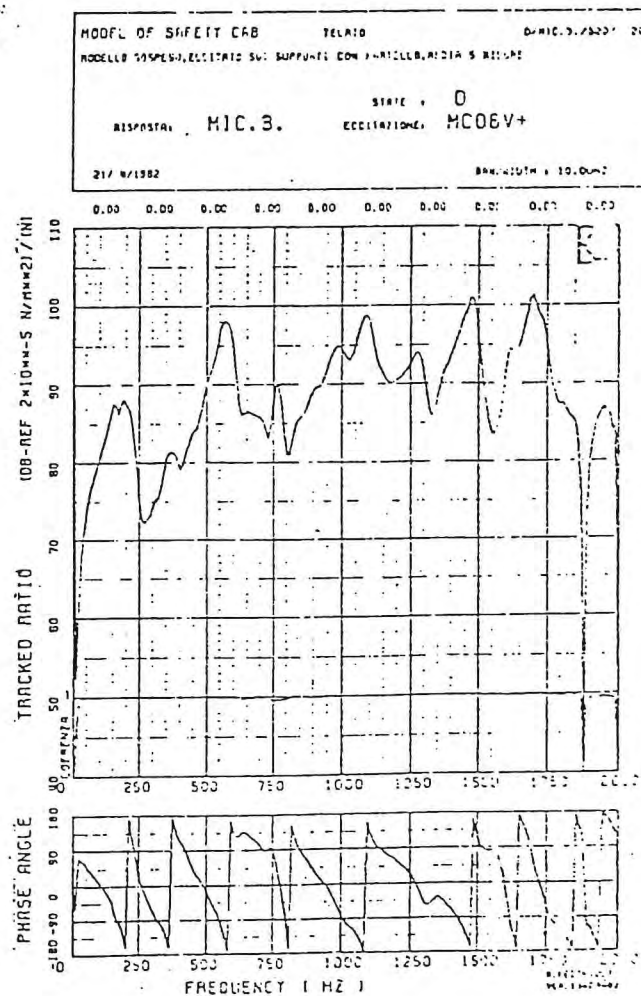
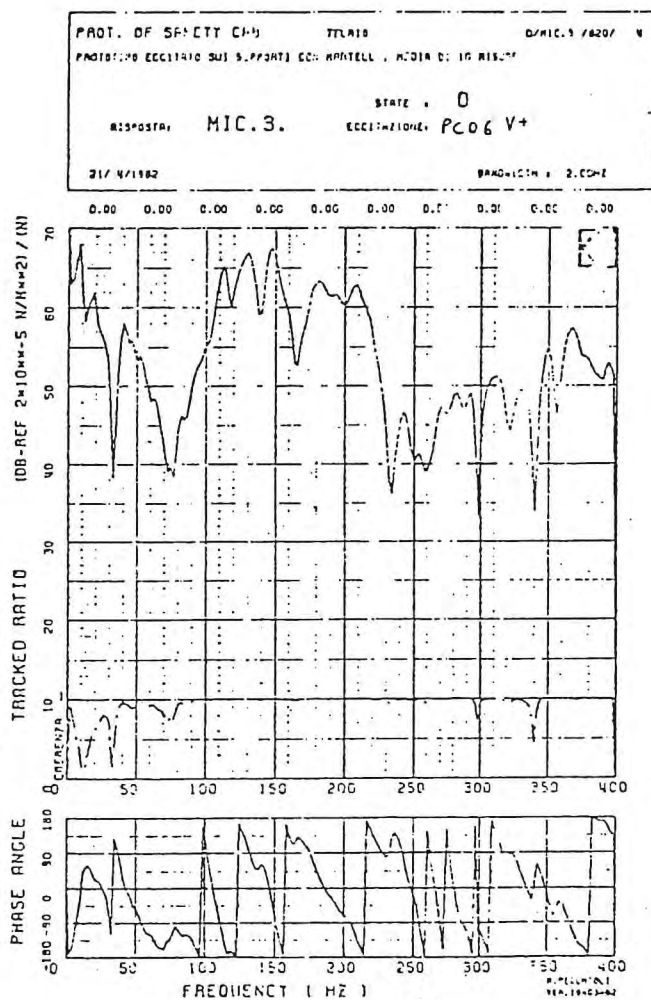
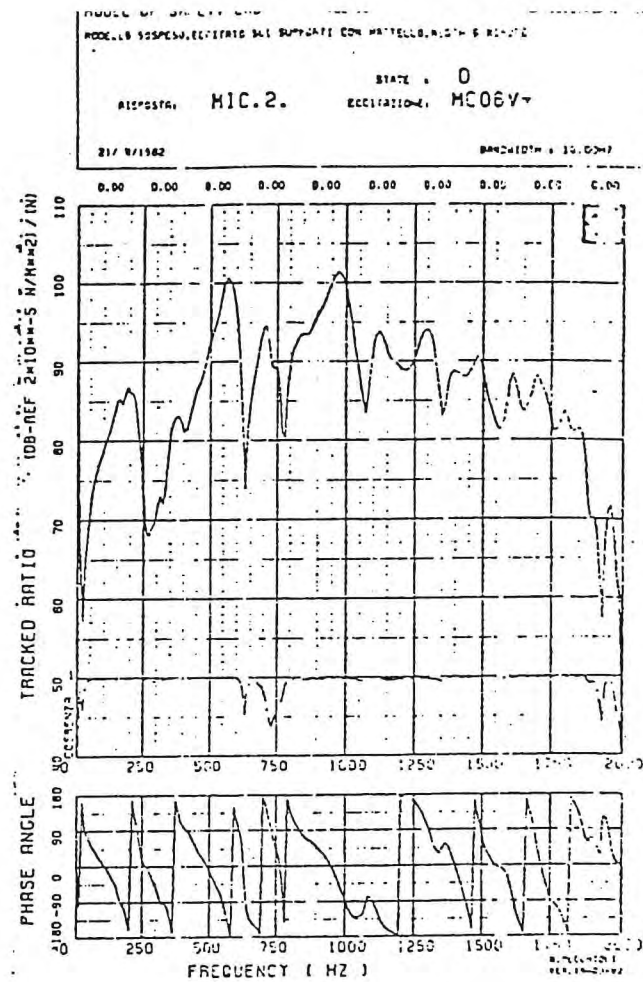
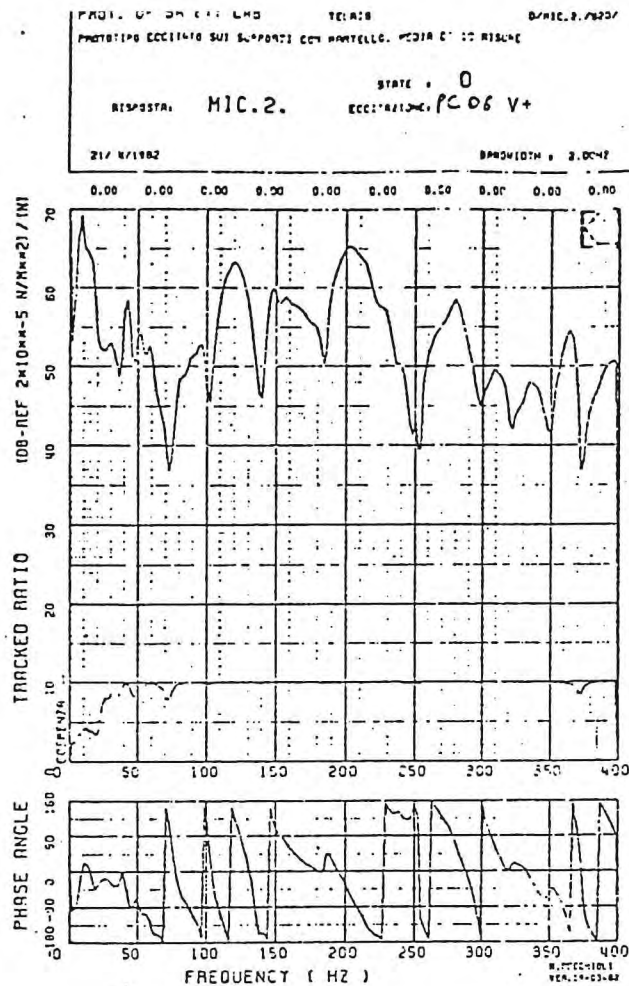


Fig. 26 - Funzioni di risposta in frequenza .

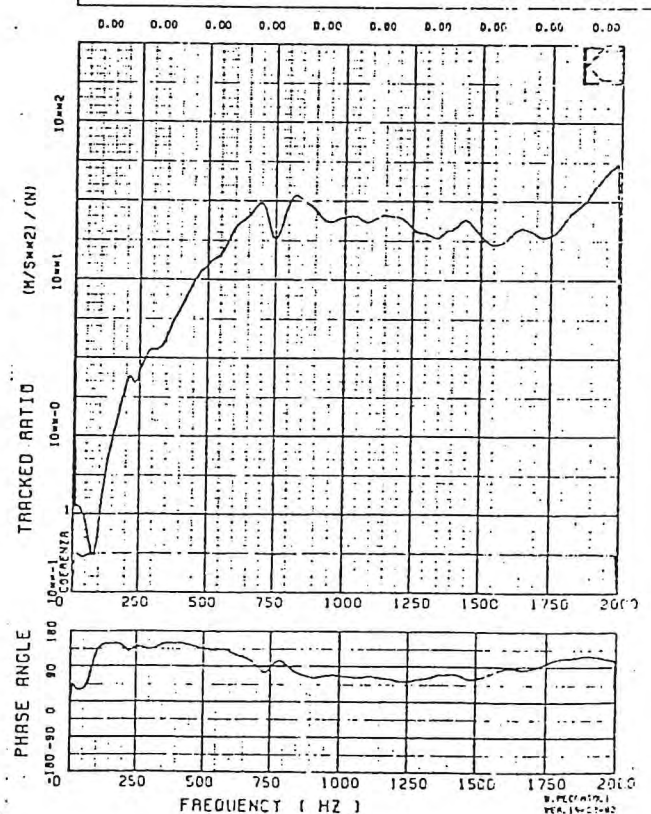
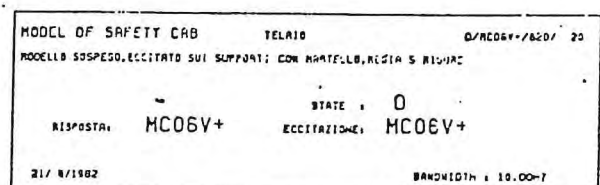
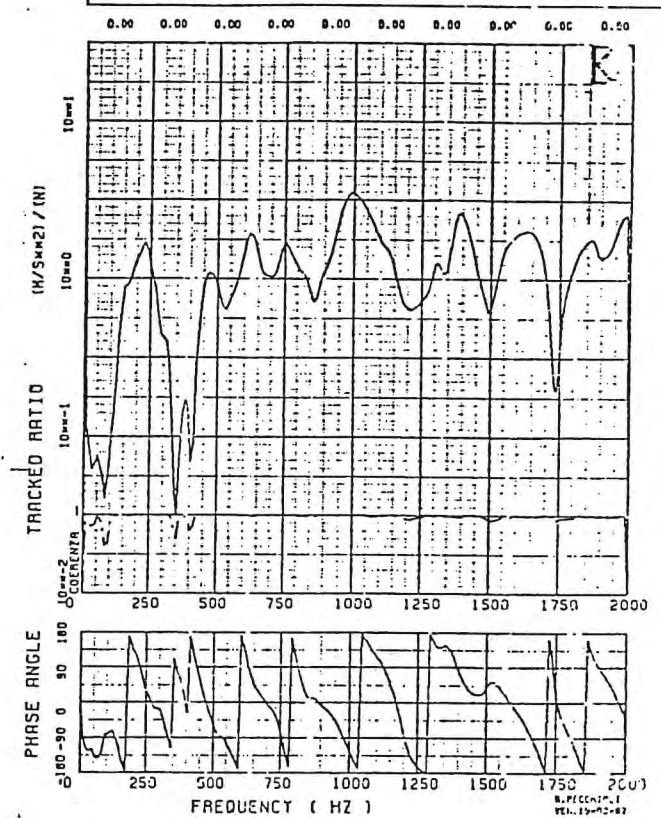
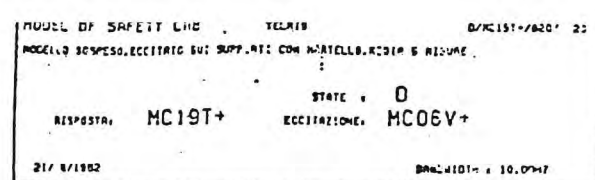
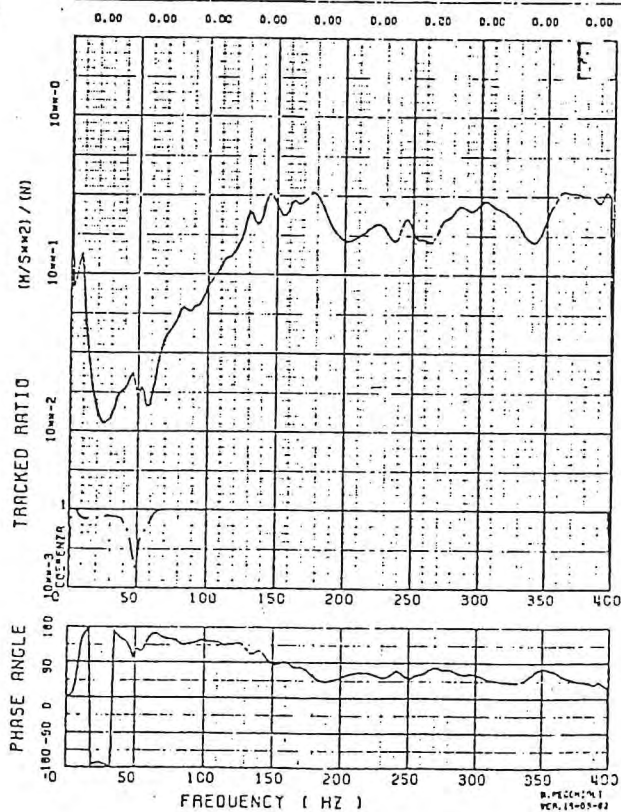
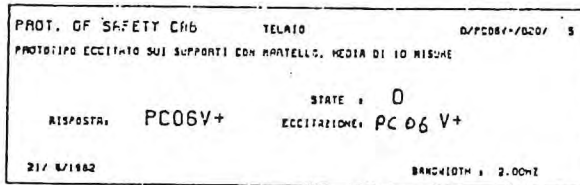
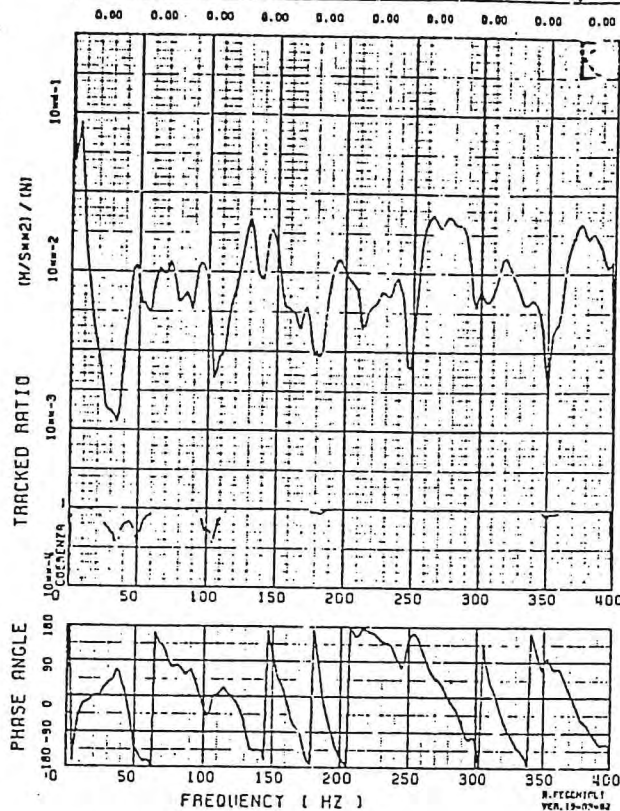
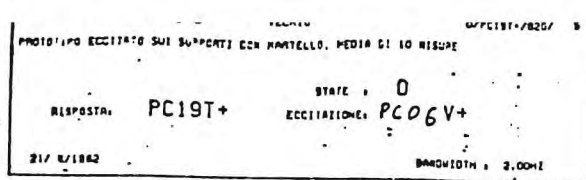


Fig. 27 - Funzioni di trasferimento .

il primo, essendo costituito dalla risposta di un accelerometro situato nel punto di eccitazione, assume il significato di impedenza meccanica del punto stesso.

E' interessante notare come sui grafici compaia anche la funzione di coerenza e come ove essa sia bassa si trovino frequentemente bassi valori delle funzioni diagrammate, segno che la perdita di coerenza è dovuta ad assenza di segnale a questa frequenza.

E' da notare che la funzione di risposta in frequenza reca un'errata indicazione della grandezza misurata in ordinata; infatti dal tabulato si dovrebbe supporre che il valore di pressione misurato viene prima espresso in dB, poi diviso per l'intensità in N della forza sollecitante, mentre invece accade il contrario: il valore della pressione viene dapprima diviso per la forza ed in seguito messo nella scala dei dB.

Notiamo anche che le funzioni di trasferimen-

to sono espresse anch'esse in scala logaritmica, ma non in dB.

La fase, nelle misure dell'impedenza del punto, è sempre prossima ai 180° , poiché l'accelerometro genera un segnale elettrico positivo quando si abbassa, al contrario del martello che lo genera negativo.

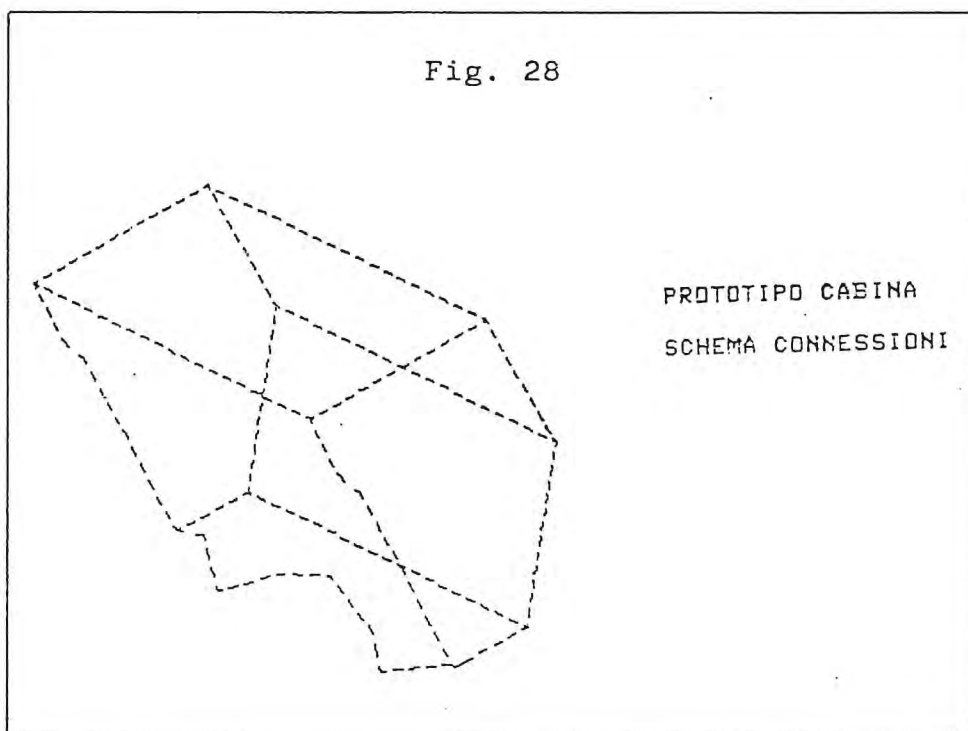
3-6-4 - Analisi modale.

I risultati delle funzioni di trasferimento non sono molto utili in sé, poiché essi descrivono il solo comportamento della struttura, non tengono conto del campo acustico.

Tuttavia da essi, con un particolare procedimento, l'analisi modale, è possibile ricavare le frequenze proprie strutturali e vedere su di un monitor la struttura muoversi in accordo con le ampiezze e fasi proprie di quella frequenza.

Per far ciò è stato però necessario fornire al sistema di elaborazione le coordinate cartesiane di tutti i punti, nonché la direzione (longitudinale, verticale, trasversale) e il segno (positivo in avanti, verso l'alto e da sinistra a destra) dell'accelerometro qui installato.

Ciò fatto, è stato pure necessario creare una connessione, nello spazio, fra i vari punti, indicando un ordine di percorrenza dei medesimi per il pennello elettronico del monitor. La particolare connessione scelta è visibile in Figura 28.



L'analisi modale ha richiesto parecchie ore, poiché il programma che la esegue è molto rigido, al minimo errore nell'introdurre i dati occorre ricominciare di nuovo.

Alla fine tuttavia abbiamo avuto modo di confrontare sul video grafico il comportamento delle 2 strutture alle stesse frequenze (in scala, ovviamente), trovando un perfetto accordo, se non delle ampiezze dei movimenti, almeno delle fasi.

Era possibile girare, sul video, la figura in ogni modo, esaminarla dal basso, ecc.

Purtroppo le stampe di particolari posizioni delle figure in movimento sono molto meno espressive delle immagini sul monitor e, ad esempio, nella Figura 29, si può vedere, dal davanti, la deformata dei 2 montanti laterali della cabina, nonché della piattaforma di fondo, che sono parecchio simili, nel modello, a quelle del prototipo.

Il grafico si riferisce, in entrambi i casi,

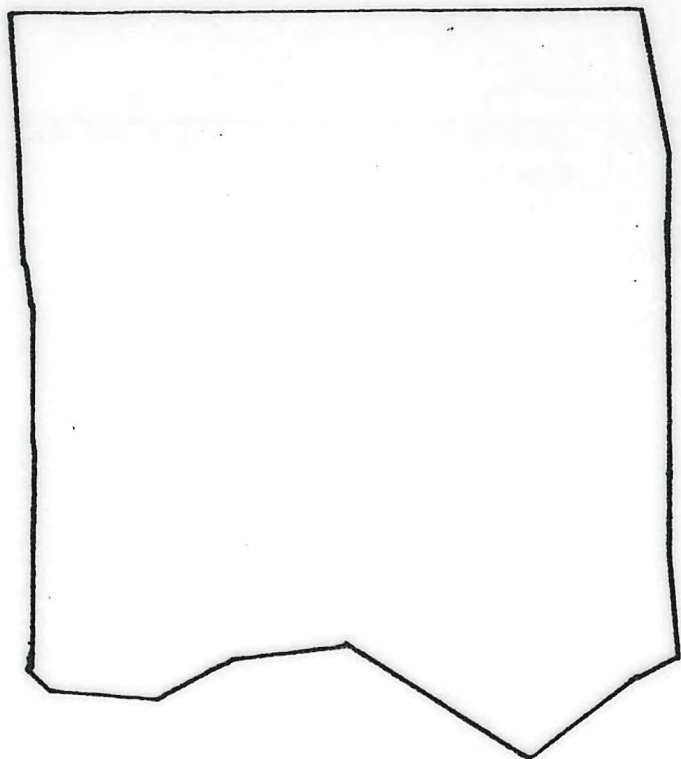
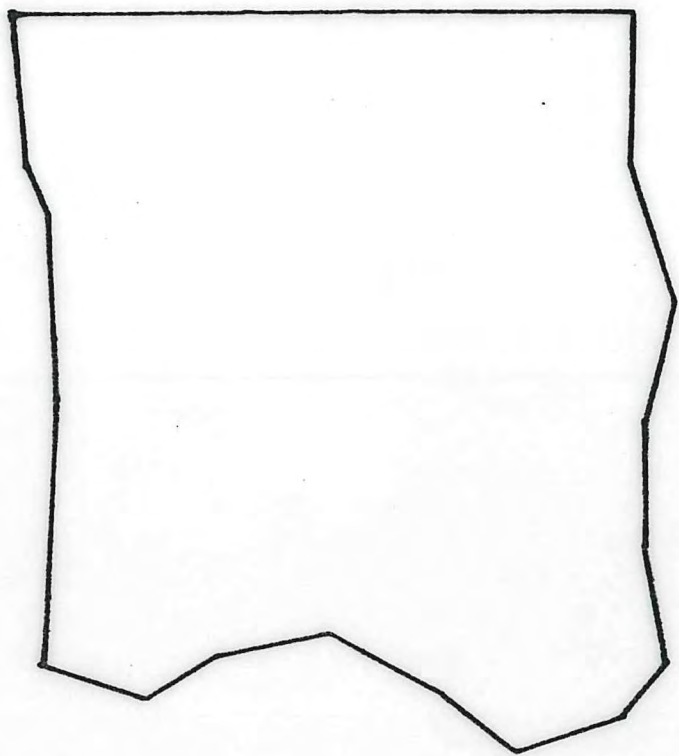
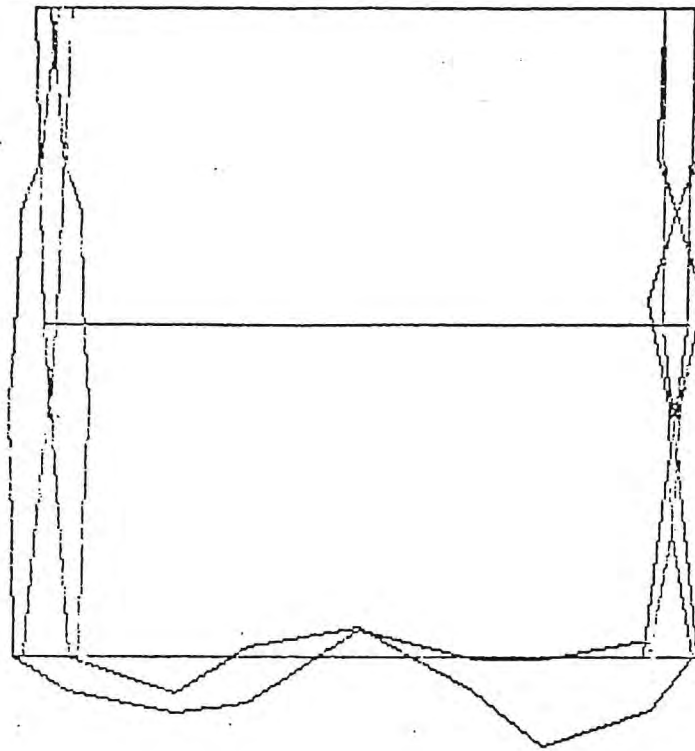
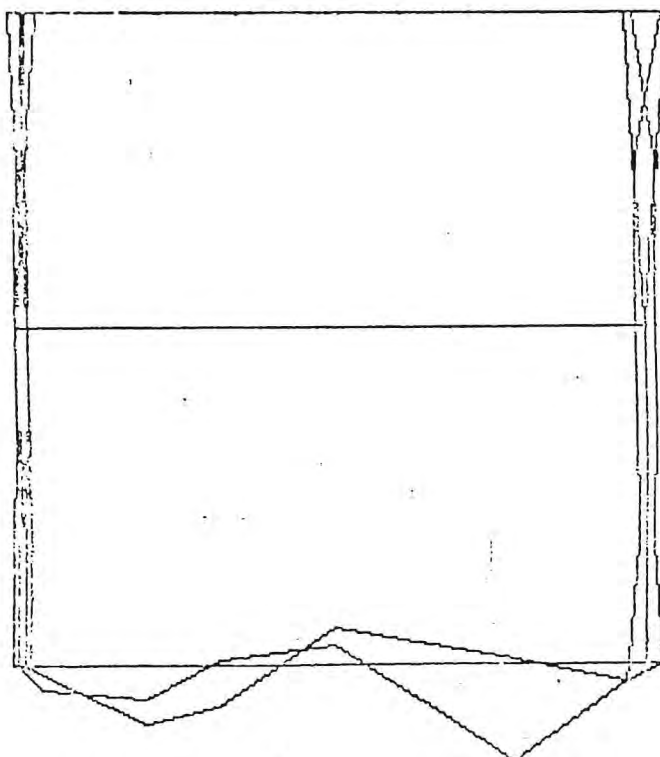


Fig. 29



MODELLO CABINA
2 MOD0 192 Hz.



PROTOTIPO CABINA
2 MOD0 38Hz.

al secondo modo proprio di vibrazione della struttura e si vede che la frequenza, nel modello, è circa quintupla di quella del prototipo.

A frequenze maggiori tutto si complica, e pertanto possiamo dire che la scelta di un ristretto campo di frequenze (0 ... 400 Hz) si è rivelata opportuna, dal momento che a frequenze superiori il numero di punti di rilevamento scelti sarebbe insufficiente.

3-6-5 - Confronto dei risultati.

Una volta rientrati in sede, abbiamo provveduto al raffronto ed alla sovrapposizione dei tracciati ottenuti. Per far ciò ci siamo serviti di una lavagna luminosa e di opposti reticolati su carta lucida fornitici dalla Keller.

Alcuni di questi grafici di raffronto sono visibili nelle Figure da 30 a 32 e si riferiscono

Fig. 50 - Confronto fra prototipo e modello

SAFETY CAB ON FIAT TRACTORS

SAFETY CAB ON FIAT TRACTORS

EXCITATION: PC-MC 06

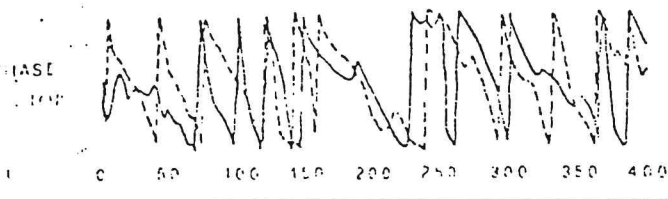
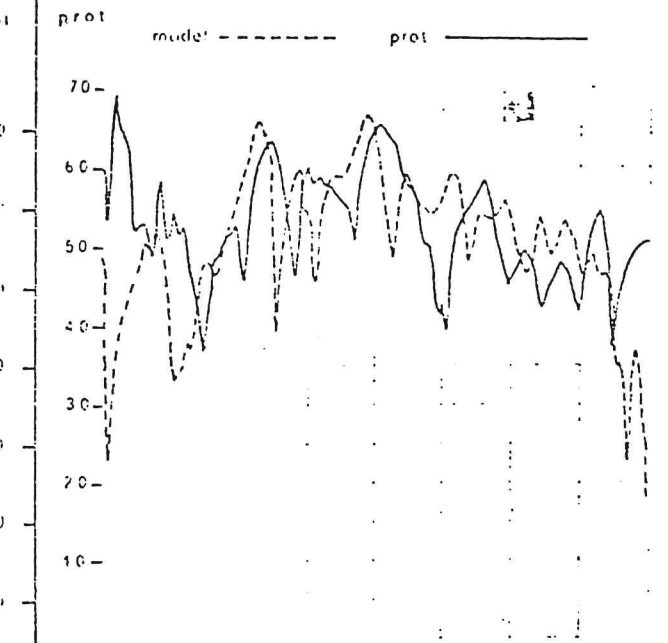
EXCITATION: PC-MC 06

263

RESPONSE: MIC 2

RESPONSE: MIC 3

dB (F=1N) GAIN FACTOR OF FREQUENCY RESPONSE FUNCTION

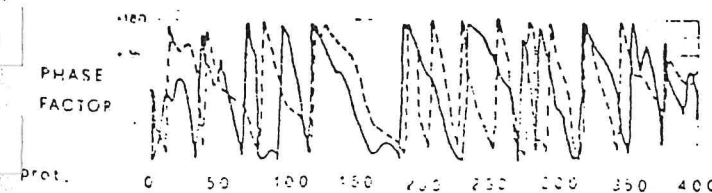
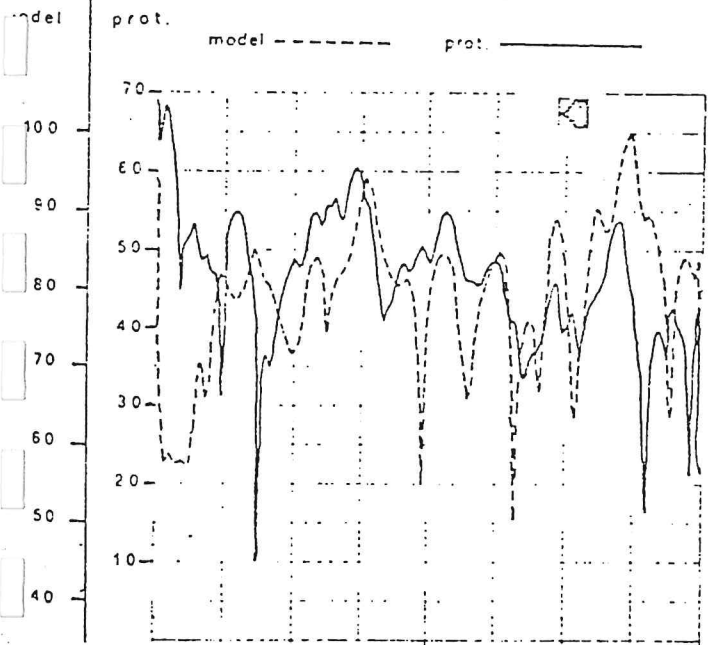


0 250 500 750 1000 1250 1500 1750 2000
SAFETY CAB ON FIAT TRACTORS

EXCITATION: TPD1

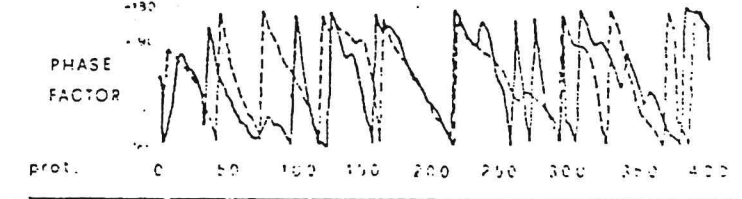
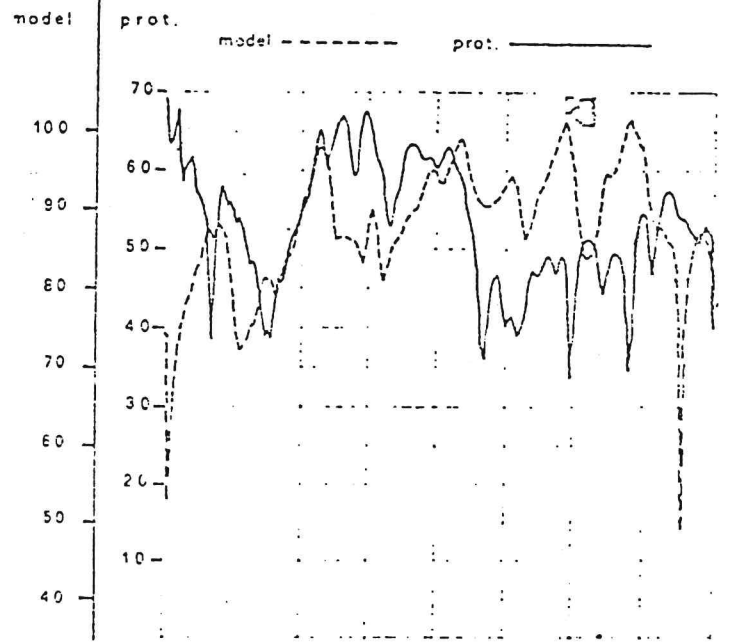
RESPONSE: MIC 3

dB (F=1N) GAIN FACTOR OF FREQUENCY RESPONSE FUNCTION



0 50 100 150 200 250 300 350 400

dB (F=1N) GAIN FACTOR OF FREQUENCY RESPONSE FUNCTION

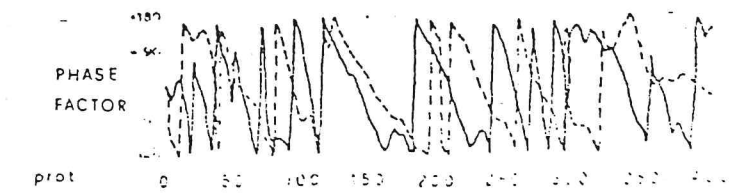
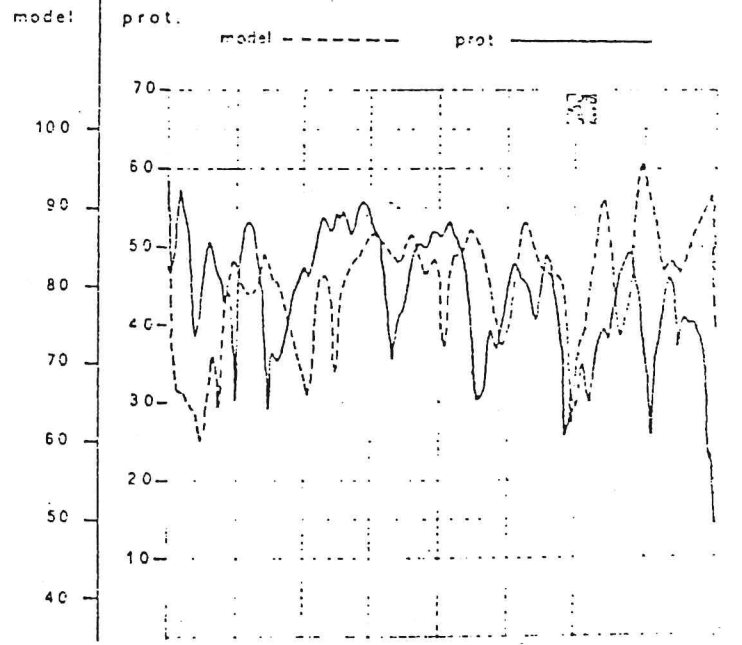


0 250 500 750 1000 1250 1500 1750 2000
SAFETY CAB ON FIAT TRACTORS

EXCITATION: TPD1

RESPONSE: MIC 2

dB (F=1N) GAIN FACTOR OF FREQUENCY RESPONSE FUNCTION



0 50 100 150 200 250 300 350 400

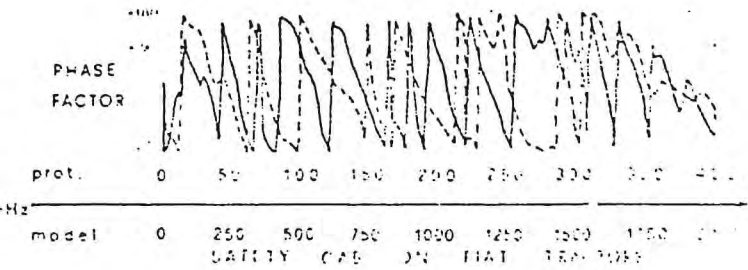
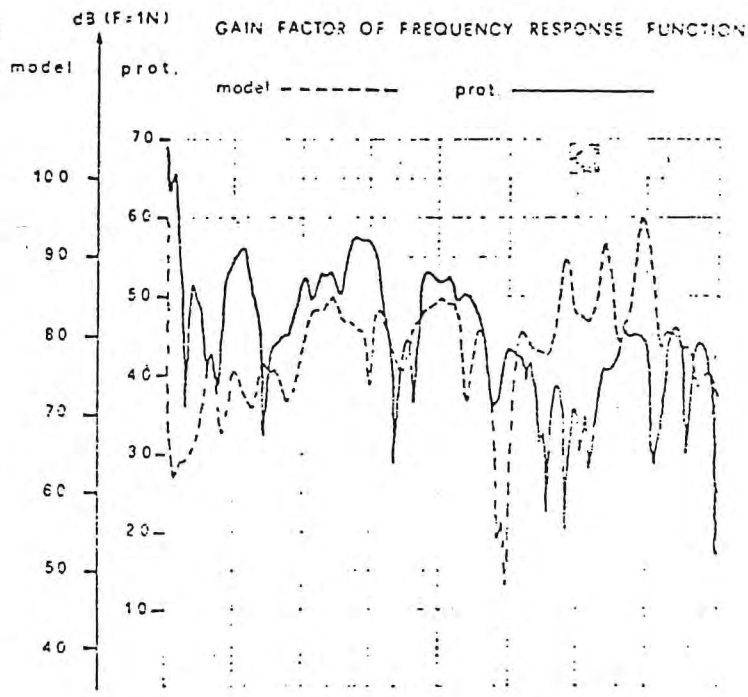
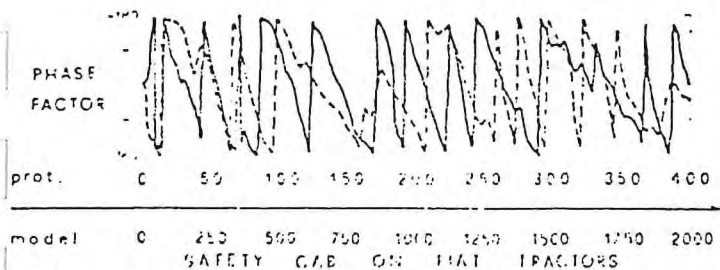
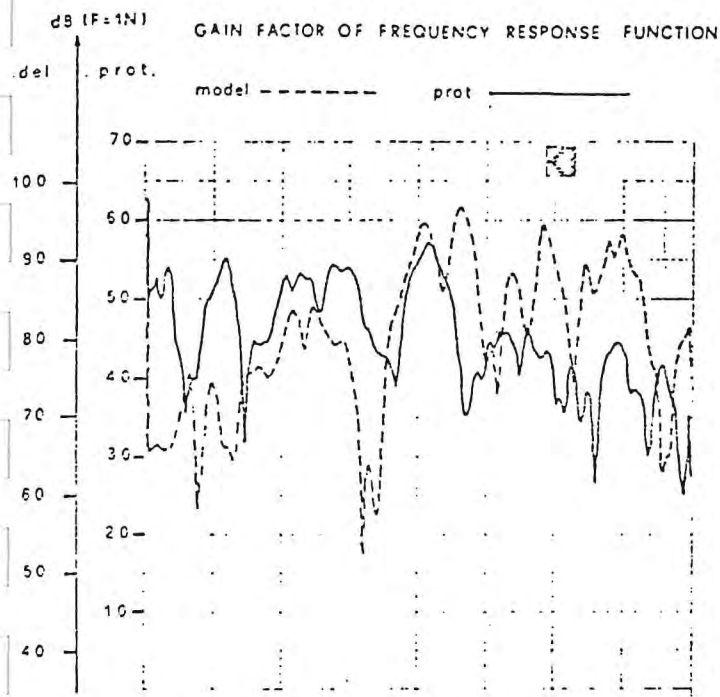
EXCITATION TPS1

EXCITATION TPS1

264

RESPONSE MIC 2

RESPONSE MIC 3

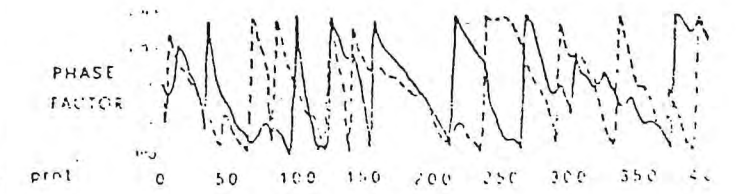
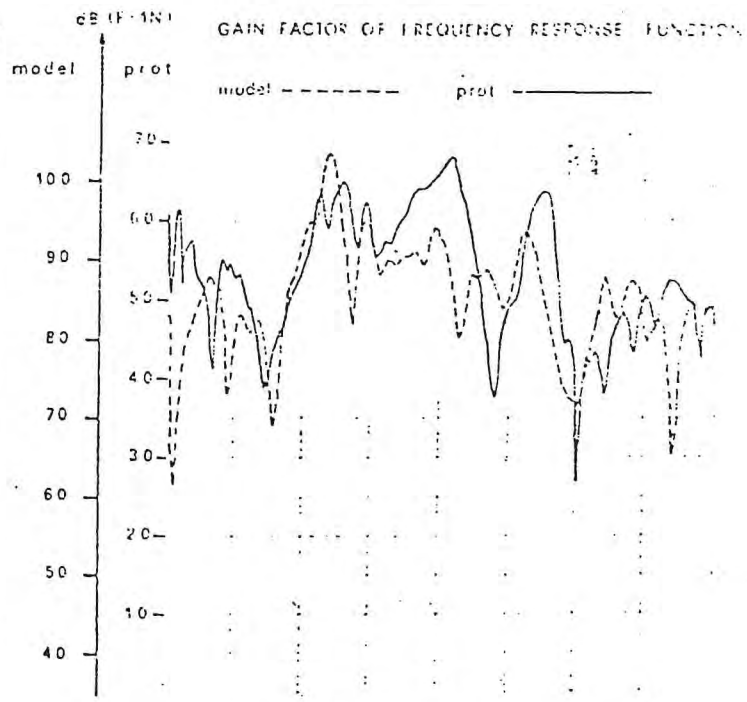
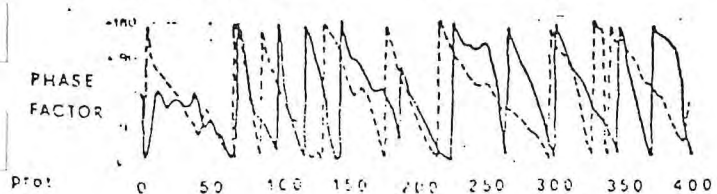
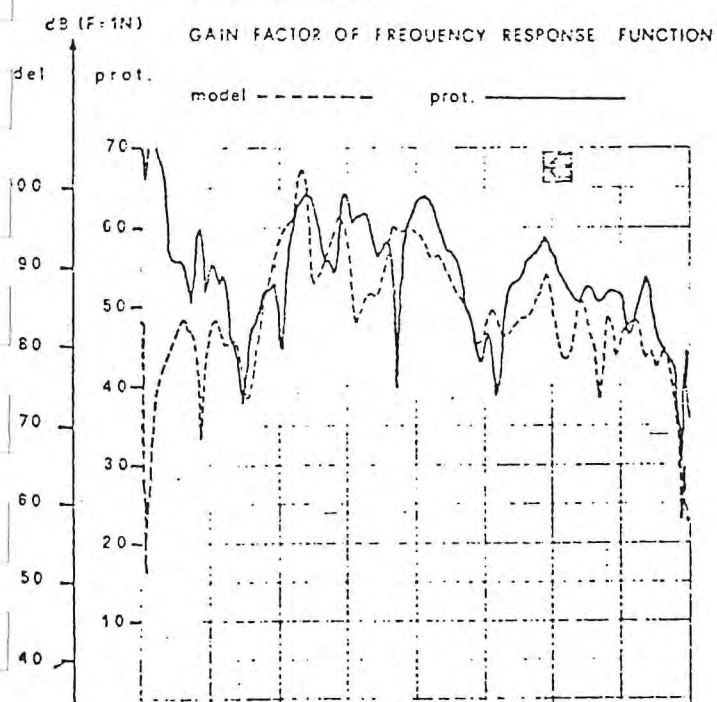


EXCITATION PC-MC 02

EXCITATION PC-MC 02

RESPONSE MIC 3

RESPONSE MIC 2

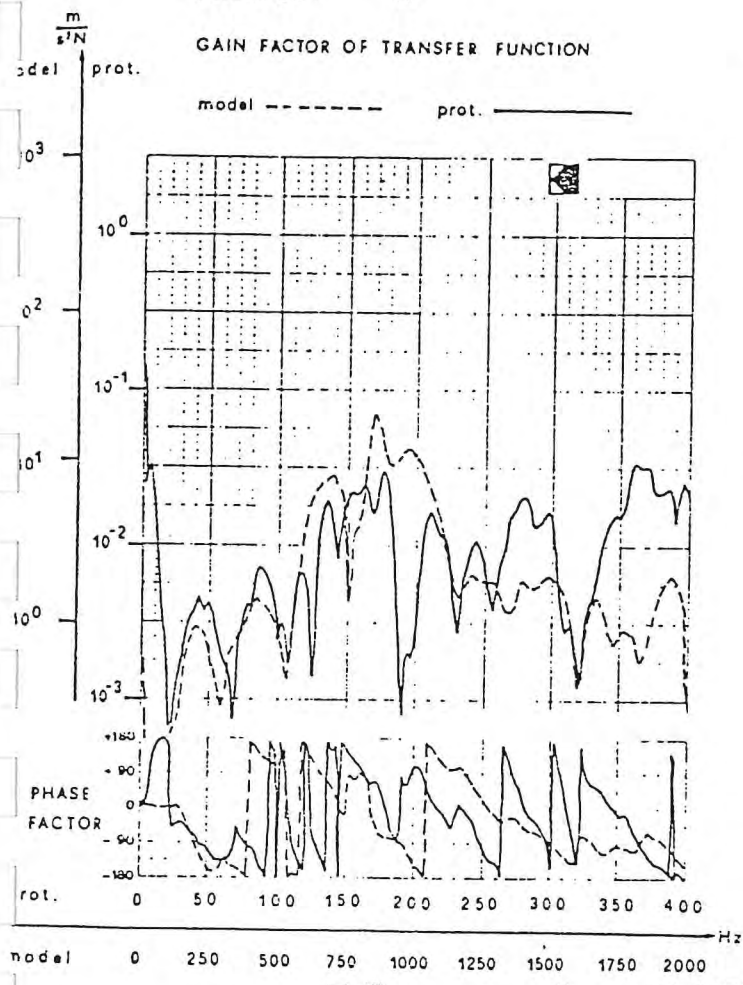


SAFETY CAB ON FIAT TRACTORS

EXCITATION : 06

RESPONSE : 14

GAIN FACTOR OF TRANSFER FUNCTION



SAFETY CAB ON FIAT TRACTORS

EXCITATION : 06

RESPONSE : 20

GAIN FACTOR OF TRANSFER FUNCTION

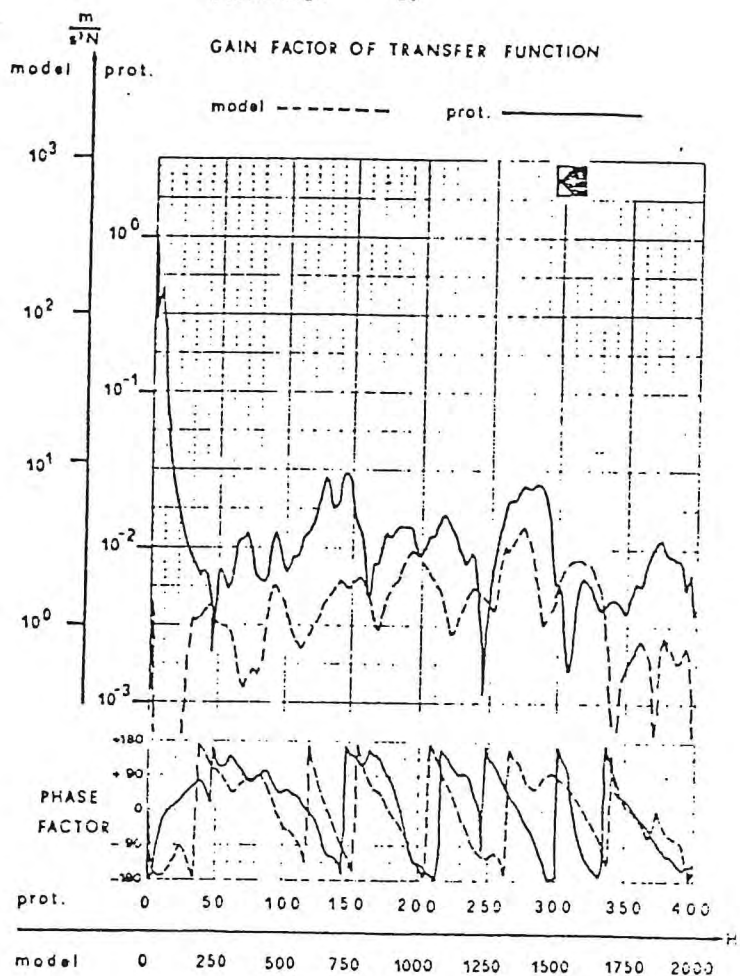


Fig. 32 - Confronto fra prototipo e modello .

agli stessi tracciati già visti in precedenza. Inoltre in Figura 33 è riportata l'impedenza meccanica dei 4 supporti della cabina.

Nel realizzare la sovrapposizione è stato necessario calcolare lo slittamento verticale fra i tracciati del modello e del prototipo. Ciò è stato fatto in accordo con i risultati ottenuti dall'analisi dimensionale. Ad esempio, per le funzioni di risposta in frequenza, ci siamo basati sul rapporto di riduzione delle forze espresso dalla (24), relativa appunto alle piastre metalliche. Essa dà:

(37)

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{1}{61.5} \approx -35 \text{ dB}$$

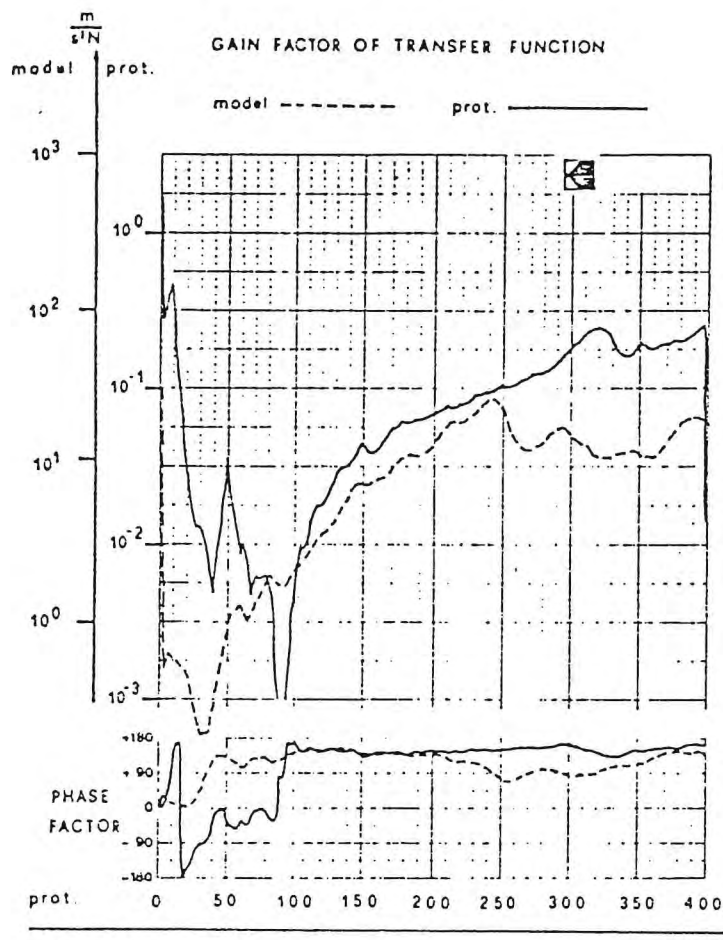
e questo è infatti lo slittamento che abbiamo introdotto nei grafici.

SAFETY CAB ON FIAT TRACTORS

EXCITATION : TPS 1

RESPONSE : TPS 1

GAIN FACTOR OF TRANSFER FUNCTION



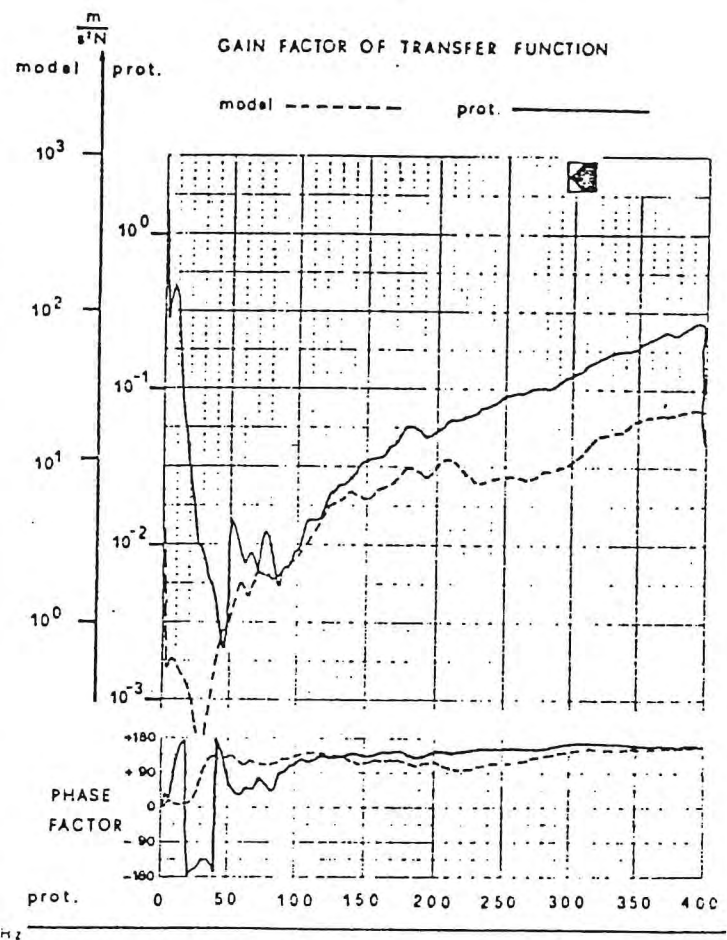
model 0 250 500 750 1000 1250 1500 1750 2000
SAFETY CAB ON FIAT TRACTORS

SAFETY CAB ON FIAT TRACTORS

EXCITATION : TPD 1

RESPONSE : TPD 1

GAIN FACTOR OF TRANSFER FUNCTION

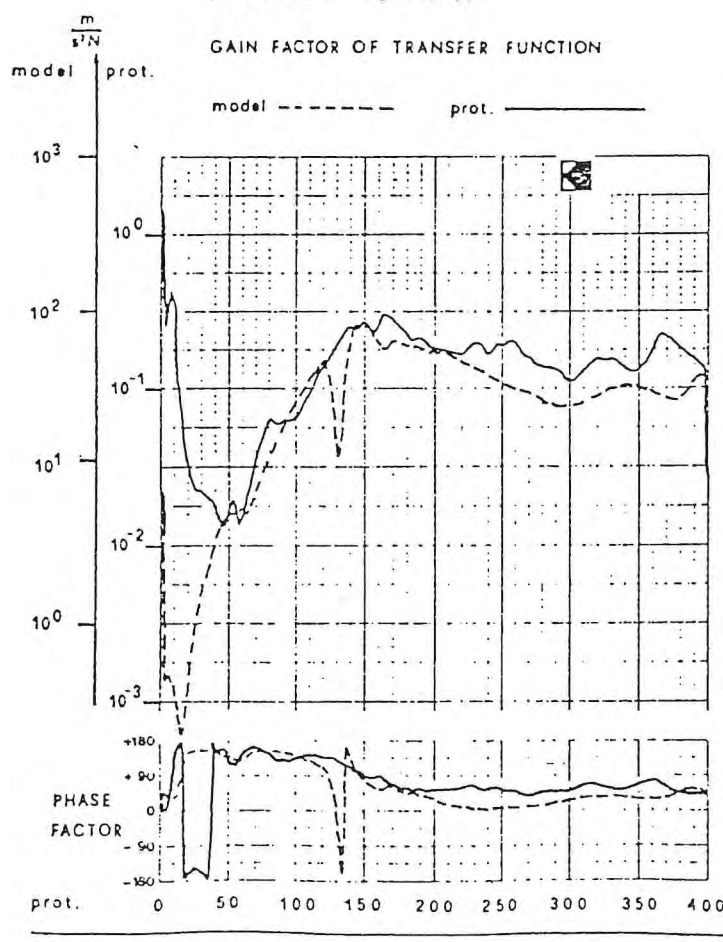


model 0 250 500 750 1000 1250 1500 1750 2000
SAFETY CAB ON FIAT TRACTORS

EXCITATION : PC-MC 02

RESPONSE : PC-MC 02

GAIN FACTOR OF TRANSFER FUNCTION

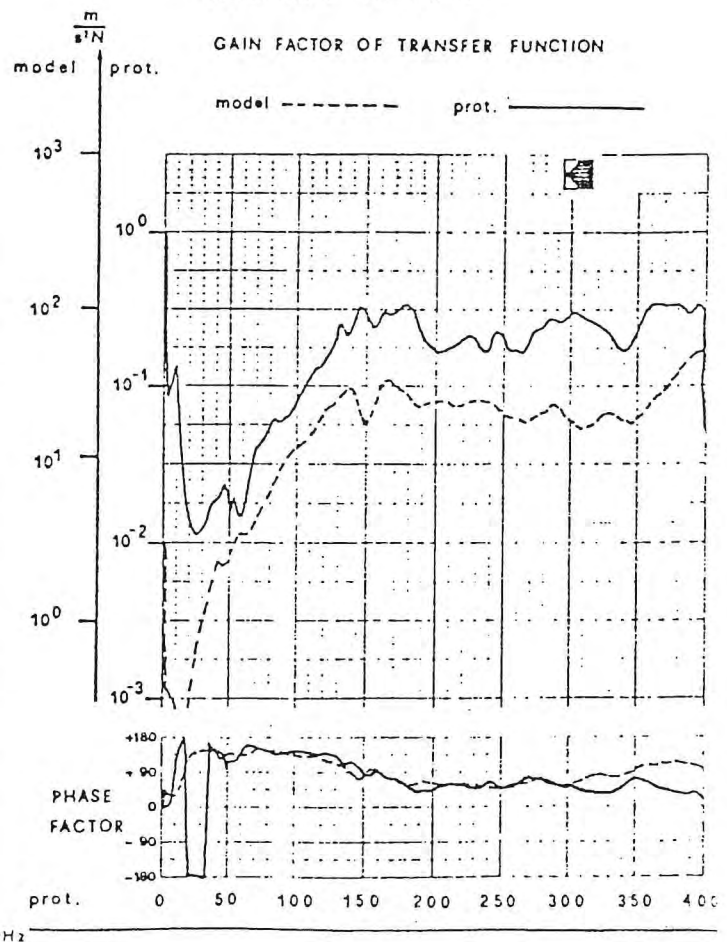


model 0 250 500 750 1000 1250 1500 1750 2000
SAFETY CAB ON FIAT TRACTORS

EXCITATION : PC-MC 06

RESPONSE : PC-MC 06

GAIN FACTOR OF TRANSFER FUNCTION



model 0 250 500 750 1000 1250 1500 1750 2000
SAFETY CAB ON FIAT TRACTORS

Per la funzione di trasferimento occorre notare che, oltre alla riduzione delle forze nello stesso rapporto 1/61.5, avviene anche l'aumento delle accelerazioni. Se la condizione (16) fosse rispettata esattamente avremmo: $a_m/a_p = 5$; siccome invece essa non è esattamente rispettata dobbiamo partire dalla:

(38)

$$F = ma$$

ed ho:

(39)

$$\frac{a_m}{a_p} = \frac{F_m/F_p}{m_m/m_p}$$

d'altronde si può scrivere:

(40)

$$m_m = \rho_m \cdot V_m$$

$$m_p = \rho_p \cdot V_p$$

Le densità sono date dalla Figura 5; i volumi, in relazione alle lastre, possono essere calcolati come $h \cdot L^2$, dunque è:

(41)

$$V_m = 1 \cdot L^2 = \frac{1}{25}$$

$$V_p = 2 \cdot L^2 = 2$$

dunque:

(42)

$$\frac{m_m}{m_p} = \frac{1}{334}$$

e dalla (39) ho perciò:

(43)

$$\frac{a_m}{a_p} = 5.44$$

ed il rapporto fra le funzioni di trasferimento,

$\frac{a_m/F_m}{a_p/F_p}$, vale dunque:

(44)

$$\frac{a_m/F_m}{a_p/F_p} = 334$$

che espresso in scala logaritmica, dà 50 dB o meglio, visto come è indicata la scala sui tabulati, dà un fattore $10^{2.5}$, come si può riscontrare dai grafici di raffronto.

Le Figure da 30 a 33 mostrano chiaramente i risultati ottenuti: molte risonanze vengono riprodotte bene, altre invece, pur essendo alla stessa frequenza, hanno intensità diverse (e questo era previsto) per l'inomogeneità dei fattori di riduzione delle forze.

C'è anche qualche slittamento in frequenza, sempre verso l'alto, come ci attendevamo, ma con

variazioni percentuali anche superiori a quelle previste.

Il risultato comunque è buono, poiché da un'analisi di questo tipo, in genere, si cerca di ottenere unicamente una valutazione delle frequenze alle quali non si deve sollecitare la cabina, per non avere campi acustici all'interno troppo forti. Se ciò non può essere evitato si ricorre a modifiche strutturali, in modo da far spostare le risonanze fastidiose.

Tutte queste valutazioni possono essere effettuate agevolmente sul modello e le modifiche strutturali sono semplici e poco costose. Pertanto l'uso di modelli di questo tipo, nella fase di sviluppo progettuale della struttura, si presenta utile e consigliabile.

I tecnici della Keller, tuttavia, ci hanno fatto notare le difficoltà che essi incontrerebbero nell'uso di modelli in scala nel loro partico-

lare lavoro: infatti viene loro generalmente assegnato un prototipo di veicolo ormai strutturalmente definito e non è possibile per loro proporre modifiche alle parti metalliche.

Si tratta solo di vedere i risultati dell'applicazione di vari pannelli e rivestimenti insonorizzanti, che, con l'uso di modelli, andrebbero riprodotti in scala anch'essi e non solo come spessori, ma anche come caratteristiche di smorzamento, ecc.

Per cui l'uso di modelli in scala per lo studio di materiali insonorizzanti appare poco proficuo e meno sicuro della sperimentazione diretta sui prototipi, che tra l'altro dovrebbe comunque sempre seguire la sperimentazione sui modelli.

Non entriamo per ora nel merito dei singoli tracciati; notiamo solo che alcuni dei picchi presenti in essi potranno essere interpretati come frequenze proprie della cavità, che altri invece

saranno da considerare frequenze proprie strutturali e vedremo in che modo è possibile separare le cause delle varie risonanze.

La discussione globale di tutte le misure eseguite nonché il confronto con le predizioni teoriche verranno fatte alla fine del capitolo.

3-7 - ULTERIORI MISURE SUL MODELLO

Indubbiamente la disponibilità dell'apparecchiatura di misura della Keller ci ha permesso di eseguire in 3 giorni una serie di misure che avrebbero richiesto mesi con la strumentazione consueta.

Tuttavia nel corso delle misure stesse, ci si erano presentati molti interrogativi ai quali, con le misure eseguite, non eravamo riusciti a dare risposta. In seguito abbiamo sentito la necessità di eseguire ulteriori prove, per saggiare

gli effetti di modifiche strutturali, della presenza della sagoma del guidatore dentro la cabina, per cercare di separare le risonanze strutturali da quelle dovute alla cavità; infine per valutare la risposta del modello a sollecitazioni acustiche invece che meccaniche.

Inoltre abbiamo voluto confrontare alcuni tracciati della funzione di risposta in frequenza e della funzione di trasferimento, ottenuti a Santhià con l'apparecchiatura della Keller, con quelli ottenuti nel laboratorio dell'Istituto di Fisica Tecnica con apparecchiature tradizionali.

3-7-1 - Influenza di una modifica strutturale.

Abbiamo pensato di modificare il fissaggio del vetro posteriore, svincolando il lato superiore dello stesso da quei due blocchetti di Perspex che simulavano le cerniere di sostegno. In questo

modo il vetro diventa un vetro come gli altri fissato elasticamente su tutto il contorno.

Abbiamo eseguito le misure in questo modo (vedi Figura 34): percussione del centro del vetro con una massa di 5 grammi, cadente da un'altezza di 50 mm. e osservazione dello spettro in frequenza ottenuto con un microfono collocato nella posizione MIC 2 tramite un analizzatore di frequenza digitale in tempo reale B & K type 2131; i 2 spettri prodotti, prima e dopo la modifica strutturale, sono visibili in Figura 35.

In essa la scala delle frequenze è sostituita dall'indicazione dei canali dell'analisi in terza d'ottava; si tenga presente che il canale 14 corrisponde ad una frequenza di 25 Hz, mentre il canale 43 corrisponde ad una frequenza di 20318 Hz.

In pratica si nota come lo svincolamento del lato superiore della lastra abbia incrementato il livello alle basse frequenze, abbia spostato

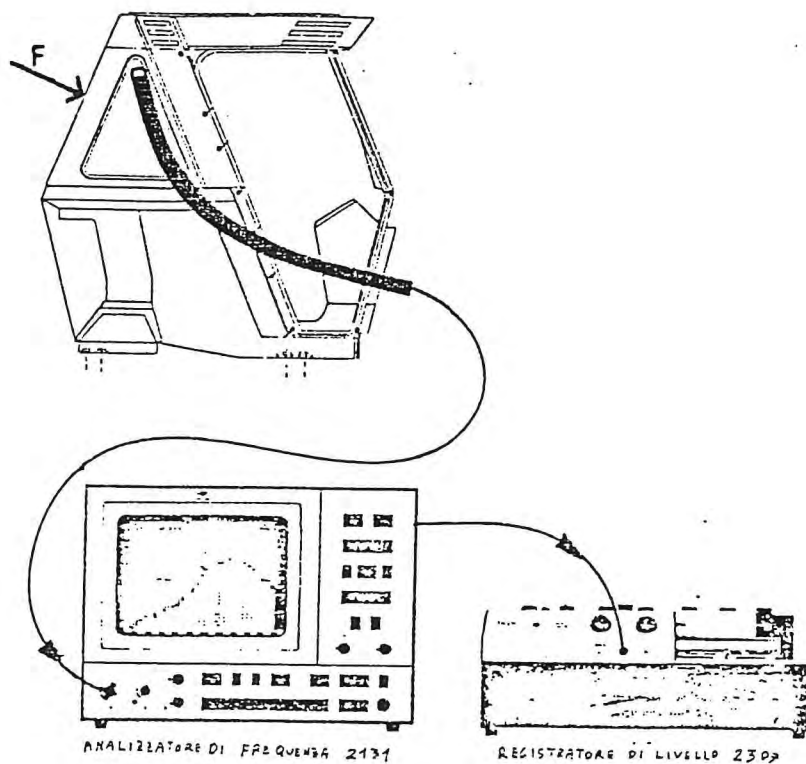


Fig. 34 - Apparecchiatura usata per la
determinazione della risposta
in frequenza del lunotto .

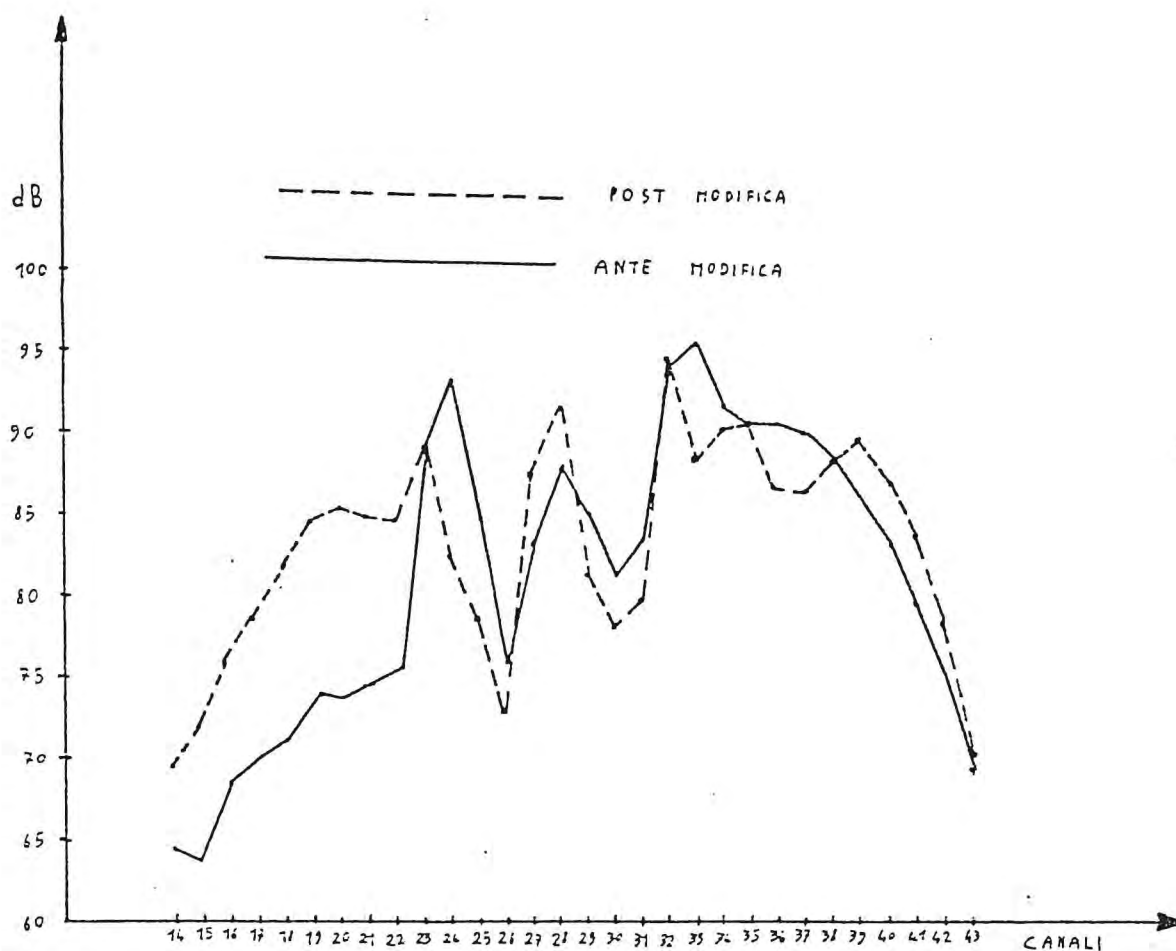


Fig. 35 - Confronto fra le risposte in frequenza del lunotto del modello prima e dopo l'asportazione delle cerniere dello stesso .

il 1° picco (di origine evidentemente strutturale) mentre il secondo, centrato sul canale 28 (630 Hz) non si è spostato in frequenza (questa è chiaramente una frequenza propria della cavità). Ad alte frequenze il comportamento non è molto dissimile.

Appare comunque evidente la grande influenza che il problema del vincolamento fra le pareti esercita sul comportamento della struttura. Anche nel corso delle prove a Santhià infatti ci eravamo resi conto che percuotendo il modello nel punto MC 18 si aveva sempre un "colpo doppio", dovuto al rimbalzo fra loro delle due aste costituenti il montante laterale della cabina.

In quel caso si era ovviato all'inconveniente incastrando un pezzetto d'alluminio nella giunzione delle aste e questo semplice accorgimento aveva fatto migliorare notevolmente il comportamento del montante.

Possiamo dunque concludere che è determinante l'accuratezza con cui vengono realizzati i particolari di giunzione fra le parti, almeno per quel che riguarda il comportamento strutturale alle sollecitazioni meccaniche.

3-7-2 - Influenza della presenza del guidatore.

Per vedere di separare le frequenze proprie della cavità da quelle della struttura, abbiamo pensato di introdurre nella cabina la sagoma del conducente, in posizione seduta, onde far variare il volume della cavità e così le sue frequenze proprie.

Viceversa l'introduzione del "guidatore" non dovrebbe alterare le frequenze strutturali, per cui, dal confronto fra le funzioni di risposta in frequenza ottenute con e senza il "guidatore" è possibile isolare i modi propri della cavità.

La sagoma, piuttosto grossolana, è stata costruita in poliuretano espanso. Per meglio far risaltare le frequenze della cavità, il modello è stato eccitato con un minuscolo altoparlante, pilotato da un generatore di segnali sinusoidali B & K type 1023 (vedi Figura 36).

Il microfono è stato collocato, per meglio risentire delle onde stazionarie all'interno della cabina, in prossimità del piede destro del guidatore, vicino alla piattaforma di fondo. Chiamiamo MIC 4 questa nuova posizione.

Siccome il piccolo altoparlante usato ha un'ottima curva di risposta in frequenza (visibile in Figura 37) (da noi stessi ottenuta) non è stato necessario variare l'intensità dell'eccitazione del segnale stesso, per mantenere costante l'intensità della sorgente sonora.

Il generatore di onde sinusoidali 1023 è comandato, tramite un albero flessibile, dal regi-

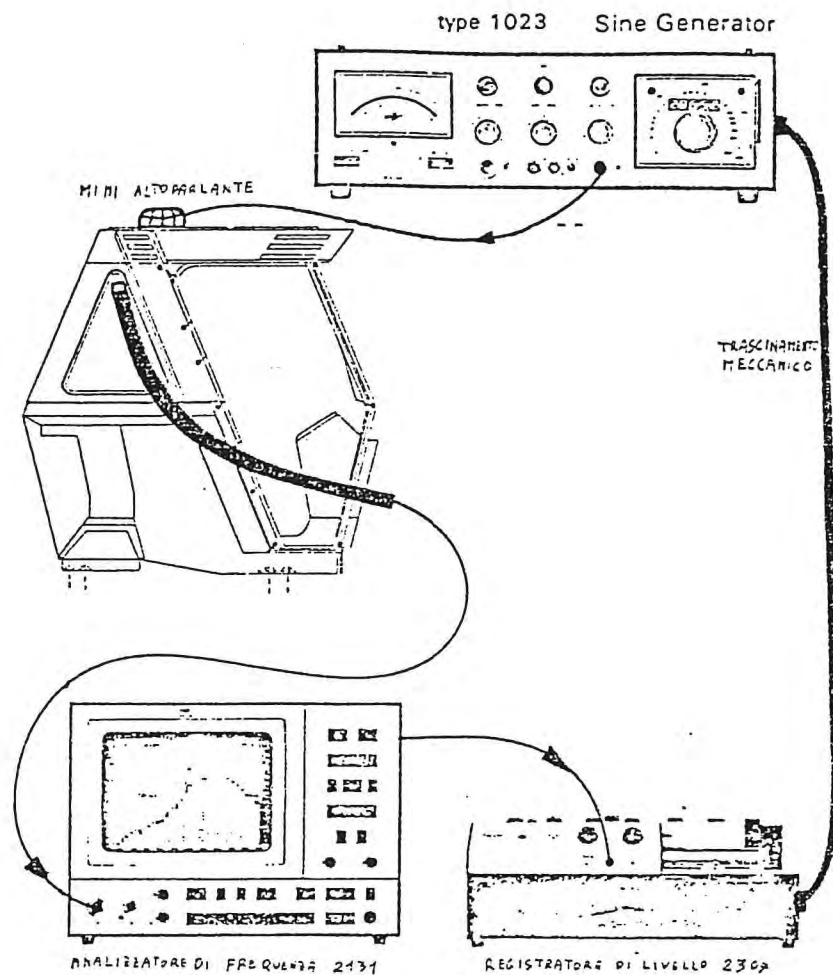


Fig. 36 - Apparecchiatura usata per la determinazione delle frequenze proprie della cavità , con e senza la saggoma del guidatore e con il modello immerso in aria o nella sabbia .

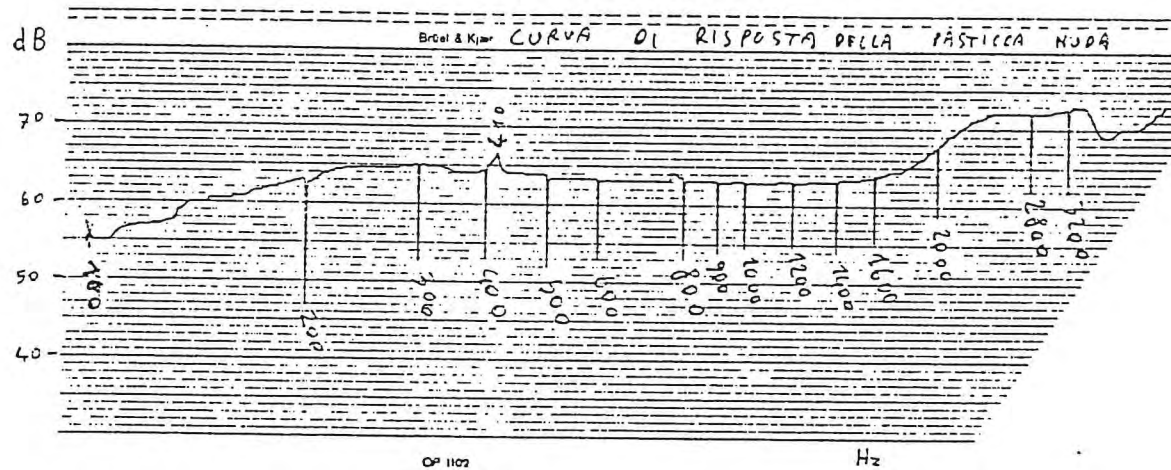


Fig. 37 - Curva di risposta in frequenza del piccolo altoparlante usato per eccitare la cavità .

stratore di livello 2307, cosicché la frequenza è stata fatta variare automaticamente, in scala logaritmica, nel tempo.

In tal modo si ottiene un tracciato di frequenza in scala logaritmica, fortunatamente poi le ordinate, in dB, hanno la stessa unità di misura dei grafici ottenuti con l'apparecchiatura Keller, per cui è possibile ricopiare i tracciati prodotti dal registratore 2307, tramite semplici operazioni grafiche, sui moduli, in scala lineare delle frequenze, fornitici dalla Keller stessa.

L'interposizione dell'analizzatore di frequenza 2131 permette di controllare che il segnale riportato in grafico sia continuamente alla stessa frequenza del segnale eccitante; se accadesse il contrario, ciò significherebbe che il segnale registrato è un rumore di fondo, non la risposta della cavità, per cui la misura andrebbe ripetuta con un'eccitazione maggiore all'altoparlante.

Sono state eseguite misure sia con la cabina in aria sia con la cabina immersa nella sabbia, onde smorzare i moti della struttura.

Nelle Figure 38 e 39 sono riportati i confronti fra le misure con e senza guidatore, nell'aria e nella sabbia. Queste figure indicano solo il fattore di ampiezza e non la fase, poiché la strumentazione era tale da registrare solo il valore medio efficace (RMS) della pressione sonora.

Si vede che la presenza della sabbia produce solo un certo aumento della pressione sonora fra i 1000 e i 1500 Hz, segno che a questa frequenza le lastre della struttura, per fenomeni di risonanza, facevano uscire energia sonora che invece nella sabbia resta ingabbiata e dà un maggior livello di pressione. Inoltre cambia forma il picco a 250 Hz, di origine evidentemente strutturale.

Maggiore differenza c'è invece fra le misure eseguite con il "guidatore" e senza: in particola-

Fig. 38 - Confronto fra le frequenze proprie della
cavità con e senza la sagoma del guida-
tore - modello in aria .

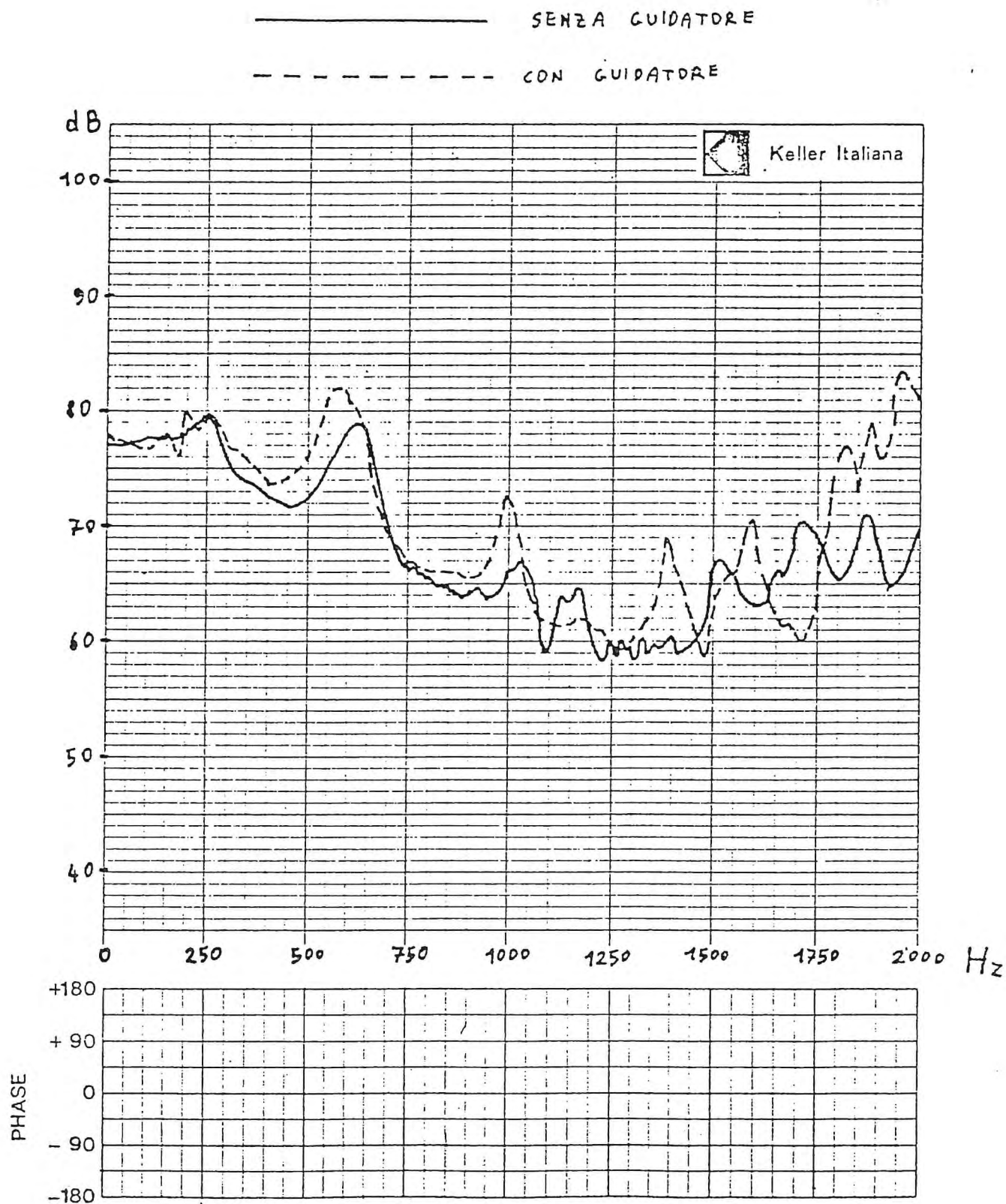
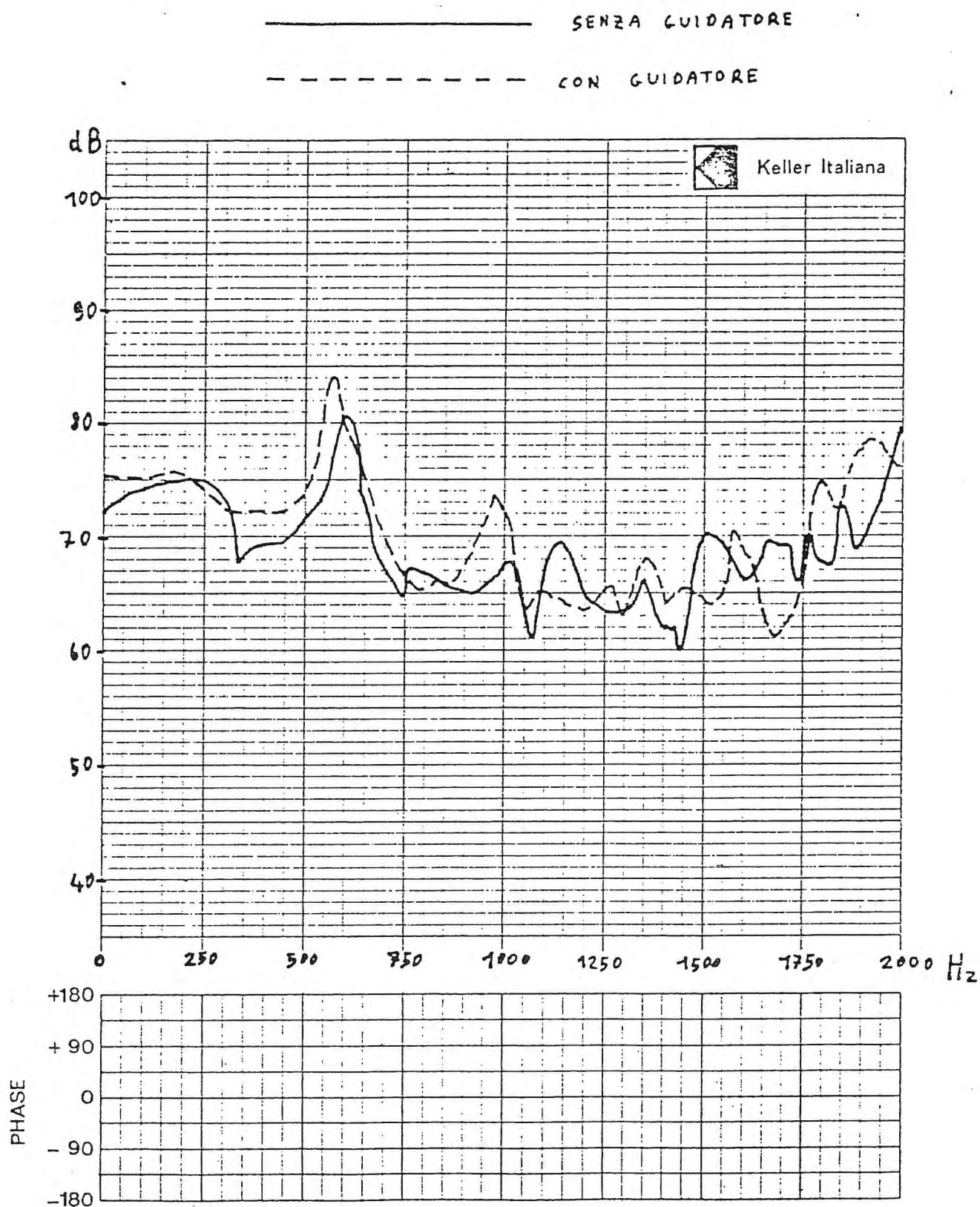


Fig. 39 - Confronto fra le frequenze proprie della
cavità con e senza la sagoma del guida-
tore - modello immerso nella sabbia .



re, sia nella sabbia che fuori, si nota che:

- la risonanza a 250 Hz è immutata (è dunque strutturale);
- la risonanza a 520 Hz diminuisce un poco in frequenza e aumenta di valore;
- dai 900 Hz in su l'andamento è nettamente differente, i picchi si spostano, ecc.: dunque siamo in un campo di frequenze della cavità.

Si noti inoltre la notevole differenza fra i tracciati ottenuti con il microfono in questa posizione e quelli ottenuti con il microfono vicino alle orecchie del guidatore (mic 2, mic 3). Ciò è dovuto alla presenza di onde stazionarie, che raggiungono il massimo valore di pressione in punti diversi della cavità, per cui spostando il microfono si registrano le une o le altre.

Il confronto fra queste misure e le precedenti sarà comunque fatto estesamente alla fine del capitolo.

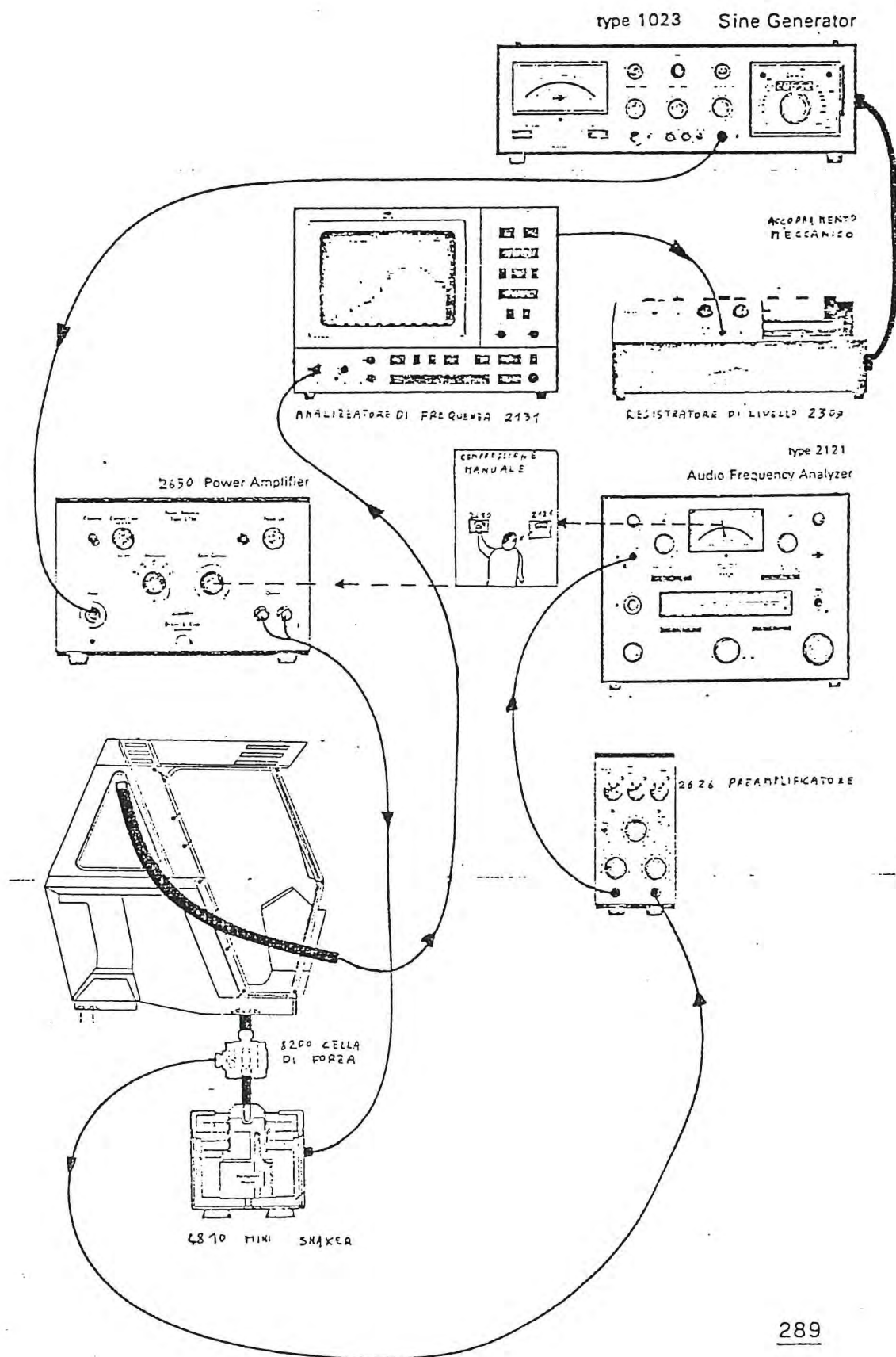
3-7-3 - Funzione di risposta in frequenza.

Abbiamo pensato di ottenere almeno il fattore di ampiezza della funzione di risposta in frequenza, mediante l'eccitazione meccanica della struttura con un mini-shaker tipo 4810 della B & K, pilotato tramite un apposito amplificatore da un generatore di onde sinusoidali tipo 1023 (vedi Figura 40).

In questo modo, frequenza per frequenza, si ottiene la risposta del campo acustico nella struttura. Il segnale proveniente dal microfono passa sempre, prima di venire registrato su carta, attraverso l'analizzatore in tempo reale 2131, per controllare che il segnale registrato sia alla stessa frequenza del segnale eccitante.

Come nel caso precedente, si ottiene un tracciato in scala logaritmica nella frequenza, che viene riportato graficamente alla scala lineare dei moduli Keller.

Fig. 40 - Apparecchiatura usata per la determinazione della funzione di risposta in frequenza .



Fra il mini-shaker e la struttura è inserita una cella di forza, collegata tramite un preamplificatore ad un indicatore di livello (2121). Al variare della frequenza, occorre che l'intensità della forza impressa alla struttura rimanga costante, in modo che i livelli di pressione sonora ottenuti lungo il grafico siano riferiti alla stessa forza (1N, così i valori in dB coincidono con quelli ottenuti dall'apparecchiatura Keller).

Per far ciò, essendo l'amplificatore di carico 2650 privo del circuito di compressione, siamo ricorsi alla compressione manuale, agendo sulla regolazione del guadagno del 2650 in modo da mantenere costantemente l'indice del 2121 sull'intensità di 1N.

Era necessario variare parecchio la posizione del guadagno, poiché l'impedenza meccanica dei punti sollecitati non è costante al variare della frequenza (vedasi la Figura 33).

Nella Figura 41 sono riportati i tracciati, in funzione della frequenza, della forza trasmessa dallo shaker con e senza la compressione manuale; come si vede, senza la compressione le variazioni sarebbero inaccettabili.

Procedendo in questo modo si sono ottenuti i tracciati visibili nelle Figure 42 e 43, ove compaiono già raffrontati agli stessi tracciati, ottenuti a Santhià con l'apparecchiatura Keller. Siccome a bassissima frequenza l'apparecchiatura da noi impiegata non può funzionare (sotto i 100 Hz), occorre considerare solo il tracciato al di sopra di questa frequenza.

Il rispetto è buono fino a 400 Hz circa e dunque i primi modi strutturali non risentono delle diverse modalità di prova. Partendo da 400 Hz e fino a 1500, invece, i 2 tracciati si discostano in modo significativo e non solo come intensità, ma anche come frequenza dei picchi.

Fig. 41 - Forza prodotta dallo shaker senza compressione e con compressione .

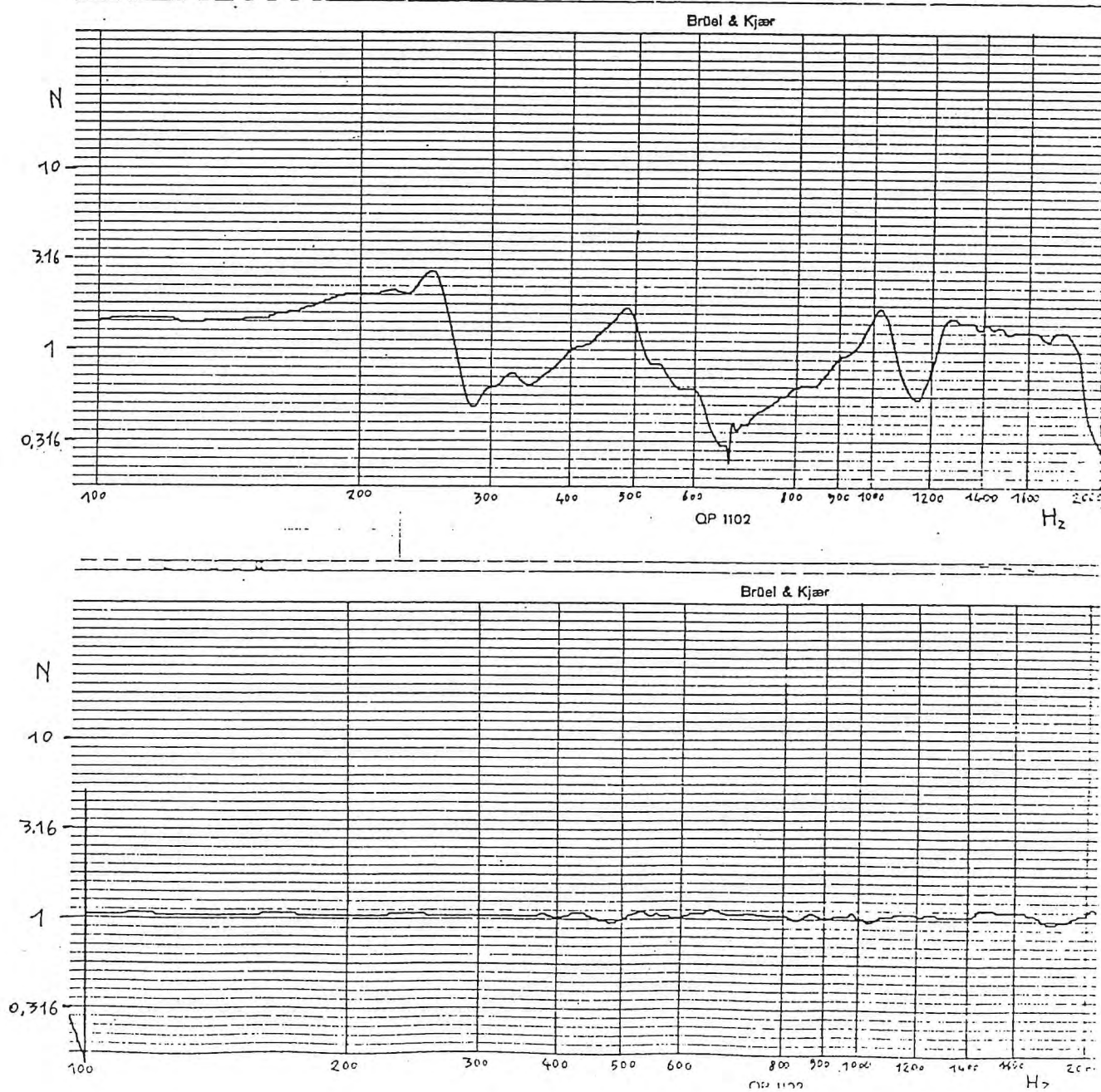


Fig. 42 - Funzioni di risposta in frequenza del
modello ottenute a Bologna e a Santhià .

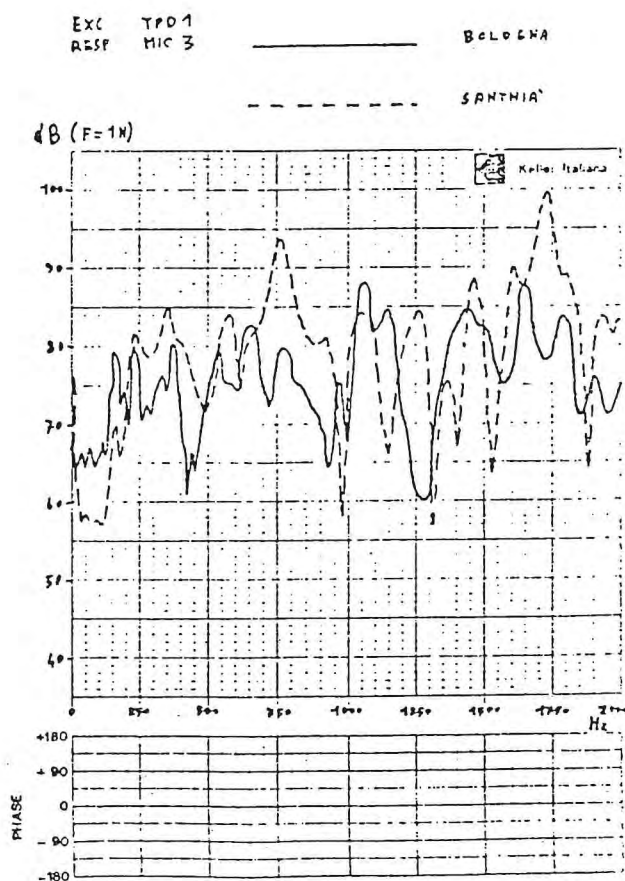
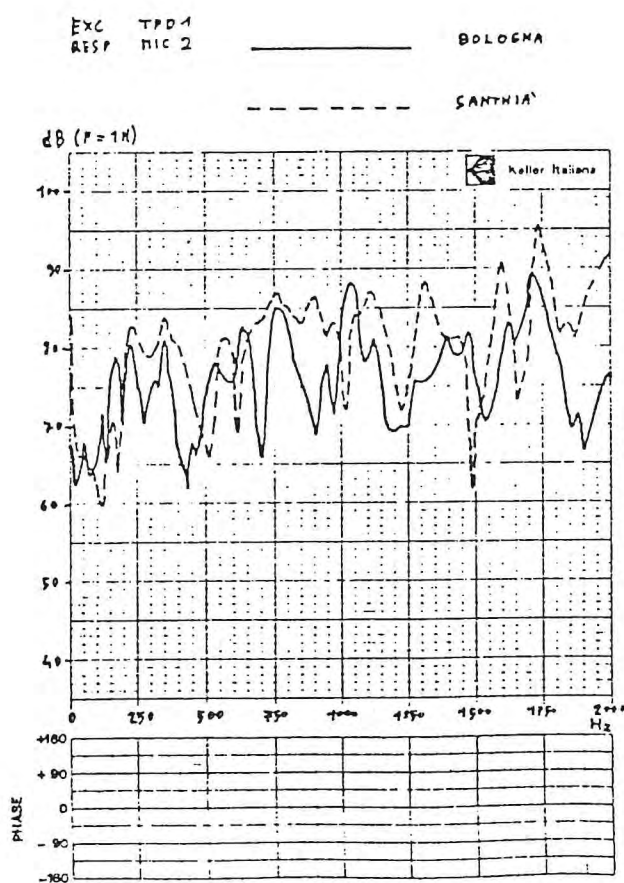
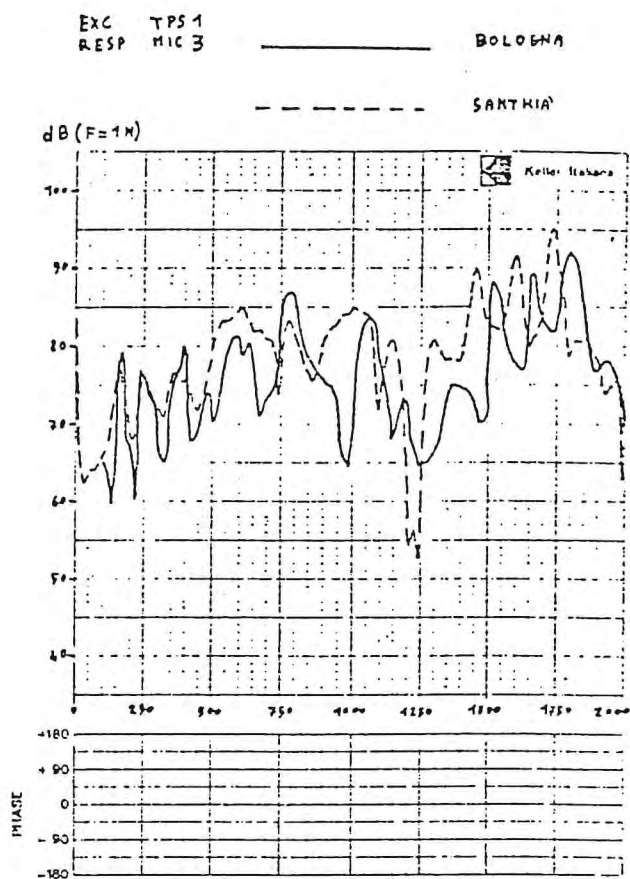
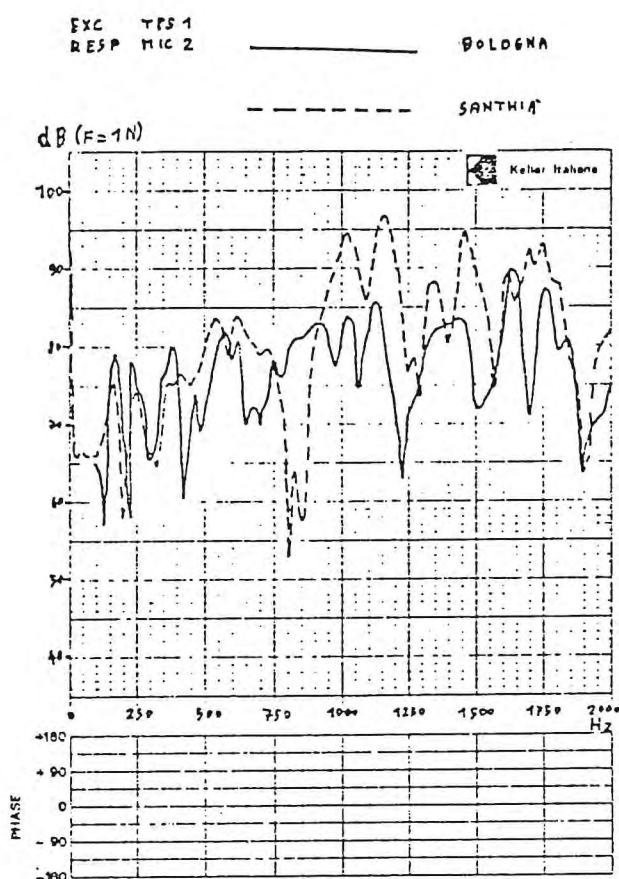
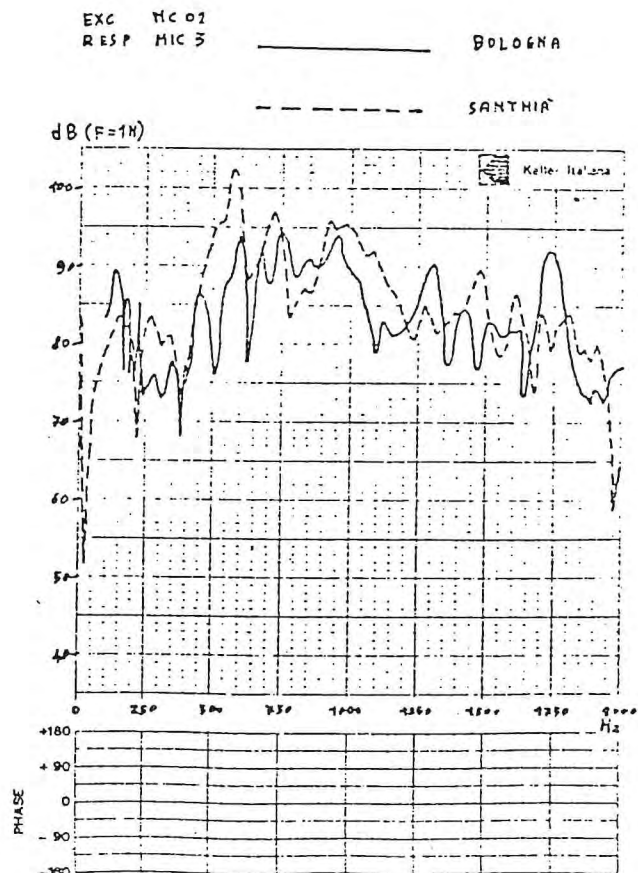
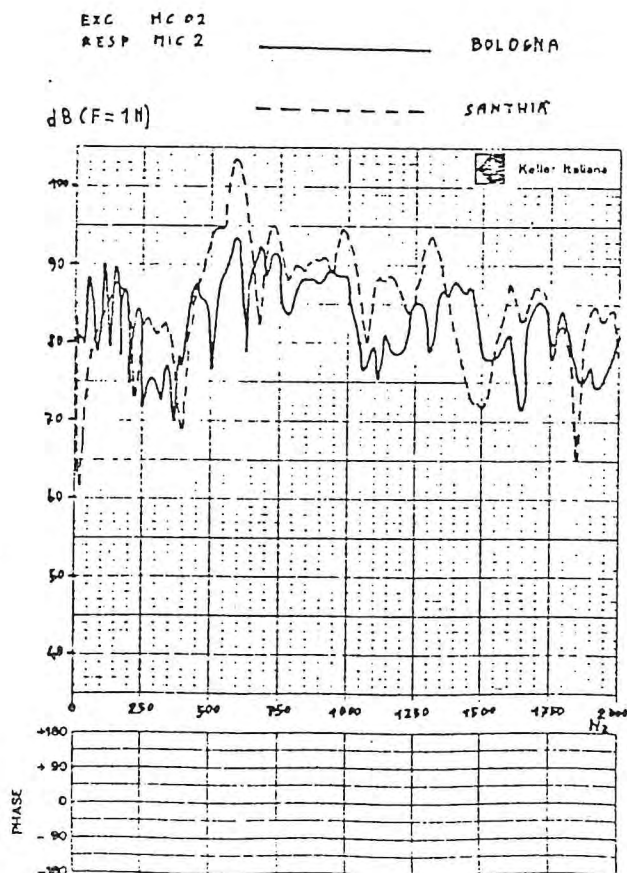
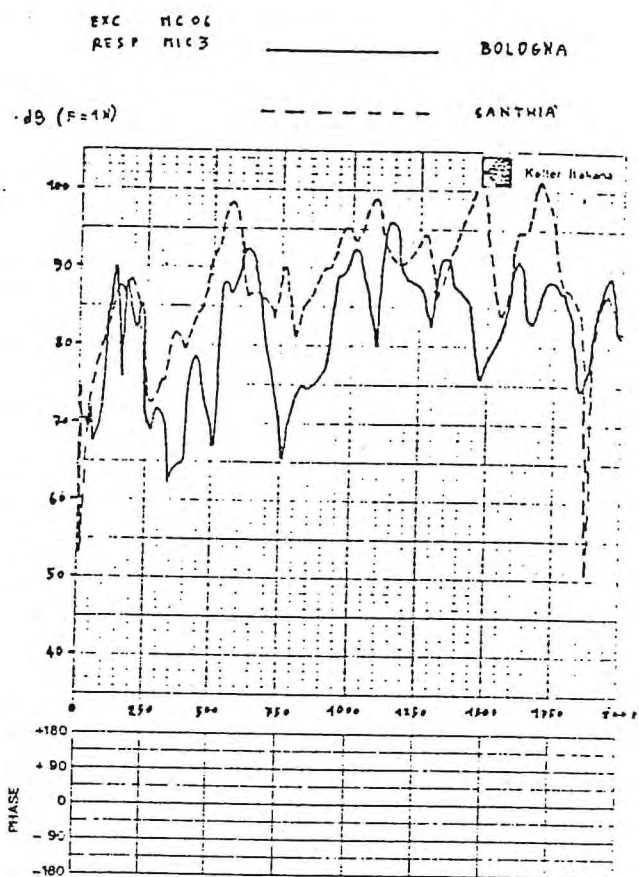
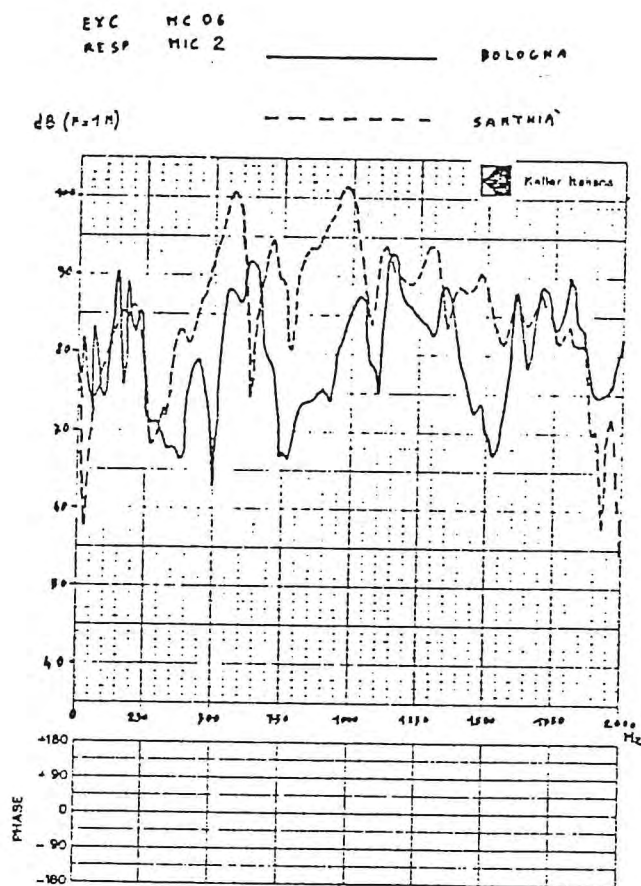


Fig. 43 - Funzioni di risposta in frequenza ottenute
a Bologna e a Santhià .



Inoltre i "buchi" che separano 2 picchi sono molto più profondi nei tracciati Keller, poiché nel laboratorio dell'Istituto di Fisica Tecnica era presente un rumore di fondo sui 60 dB, che copre dunque i buchi al di sotto di questo valore.

Sopra i 1500 la coincidenza fra i tracciati torna buona. La mancanza di informazioni sulla fase e la lentezza delle misure ottenute col nostro procedimento mostrano però che il miglior modo di ottenere le funzioni di risposta in frequenza è sempre quello dell'analisi di Fourier comparata dei 2 segnali, sollecitante e risposta.

Pertanto l'apparecchiatura da noi usata fornisce solo risultati indicativi, in grado però, come vedremo, di permettere comunque l'identificazione di alcune frequenze proprie, strutturali e della cavità.

In futuro ci siamo ripromessi di realizzare alcune misure della funzione di risposta in fre-

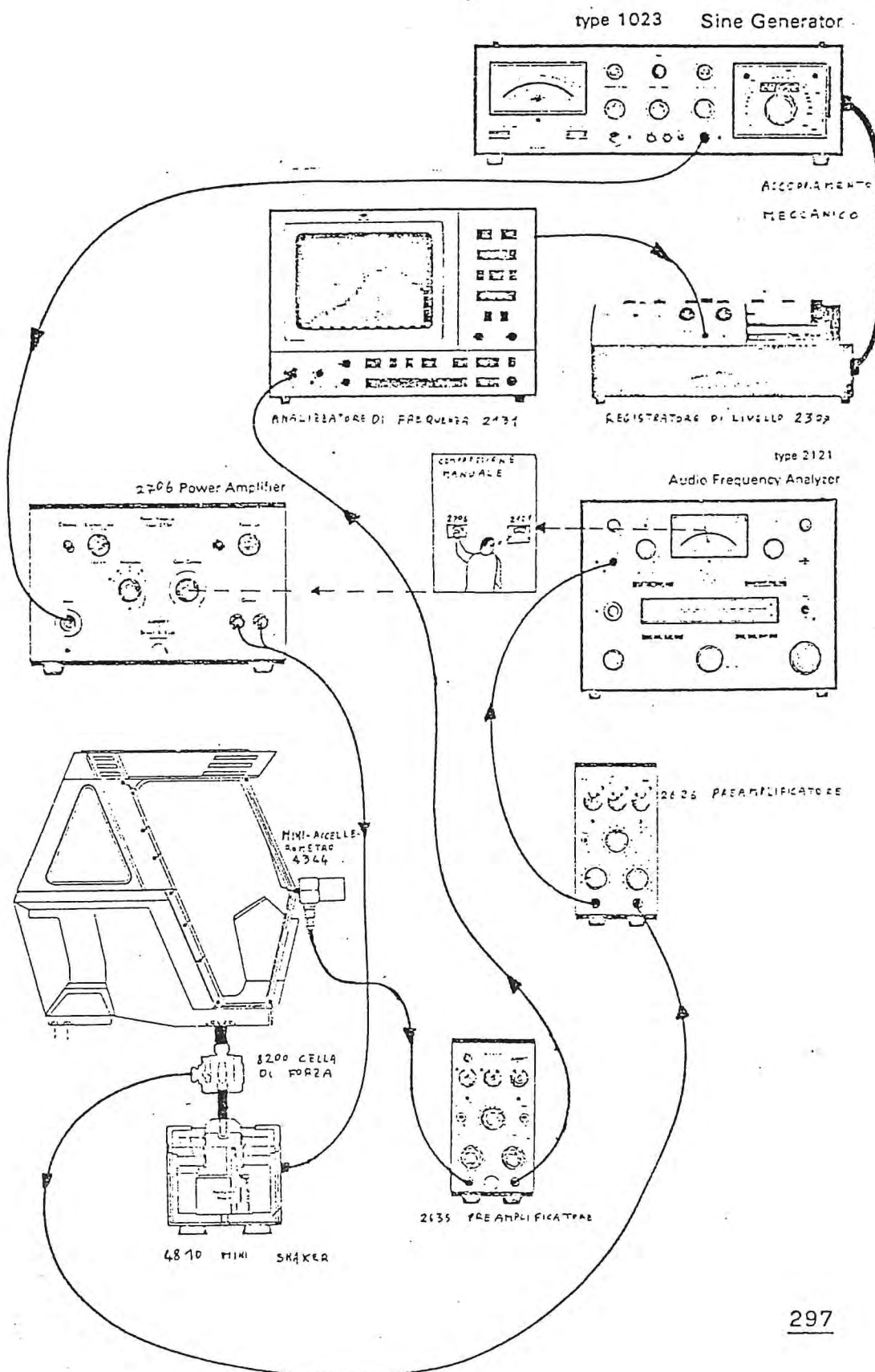
quenza, utilizzando un microcalcolatore collegato tramite un interfaccia analogico-digitale ai preamplificatori della cella di forza e del microfono.

3-7-4 - Funzione di trasferimento.

La strumentazione usata in questo caso, visibile in Figura 44, è molto simile a quella del caso precedente, solo che compare l'accelerometro al posto del microfono.

Anche queste misure sono servite soprattutto per verificare la ripetibilità delle misure eseguite a Santhià. Inoltre abbiamo voluto verificare nei fatti il ben noto principio di reciprocità, secondo il quale la funzione di trasferimento da A a B è uguale a quella da B a A. Questo principio era stato da noi utilizzato nel corso delle misure presso la Keller, per evitare di dover spostare

Fig. 44 - Apparecchiatura usata per la determinazione della funzione di trasferimento .



l'accelerometro per ogni serie di colpi sul modello.

La verifica di detto principio ci avrebbe dunque garantito sulla correttezza delle misure della funzione di trasferimento, sulle quali tra l'altro poggia poi l'analisi modale. E' stato necessario anche in questo caso ricorrere alla compressione manuale per mantenere costante la forza sollecitante di 1N.

Nella Figura 45 sono visibili alcuni confronti fra le funzioni di trasferimento ottenute con le 2 diverse strumentazioni. Come sempre manca ogni indicazione sulla fase.

Si nota che i tracciati si avvicinano di più a quelli ottenuti con l'analisi di Fourier, a parte qualche strano picco ogni tanto, di quanto accadesse per le funzioni di risposta in frequenza.

Infine abbiamo eseguito la verifica del principio di reciprocità: il risultato è visibile in Figura 46 ed è stato ottenuto scambiando fra loro

Fig. 45 - Funzioni di trasferimento del modello
ottenute a Bologna e a Santhià .

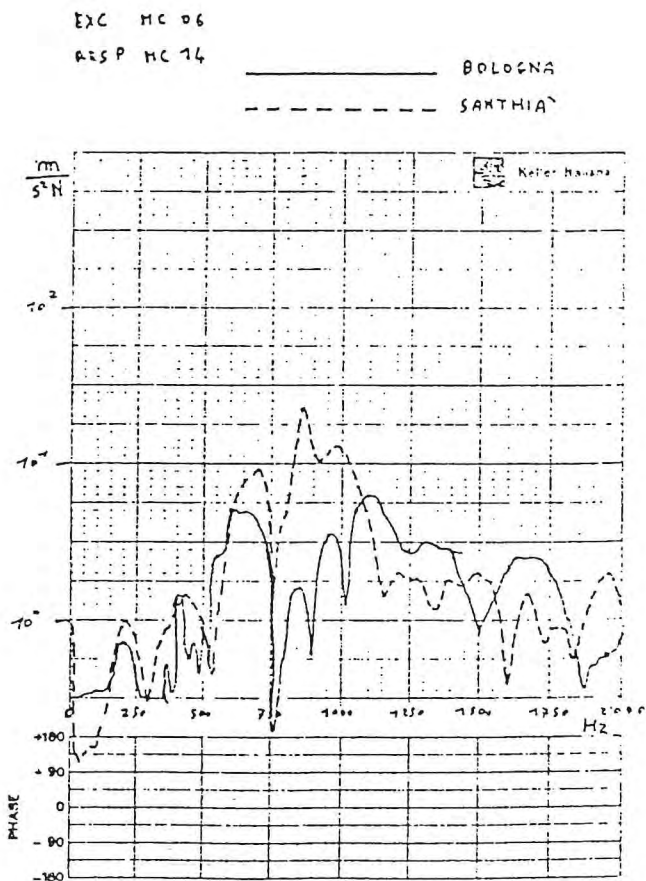
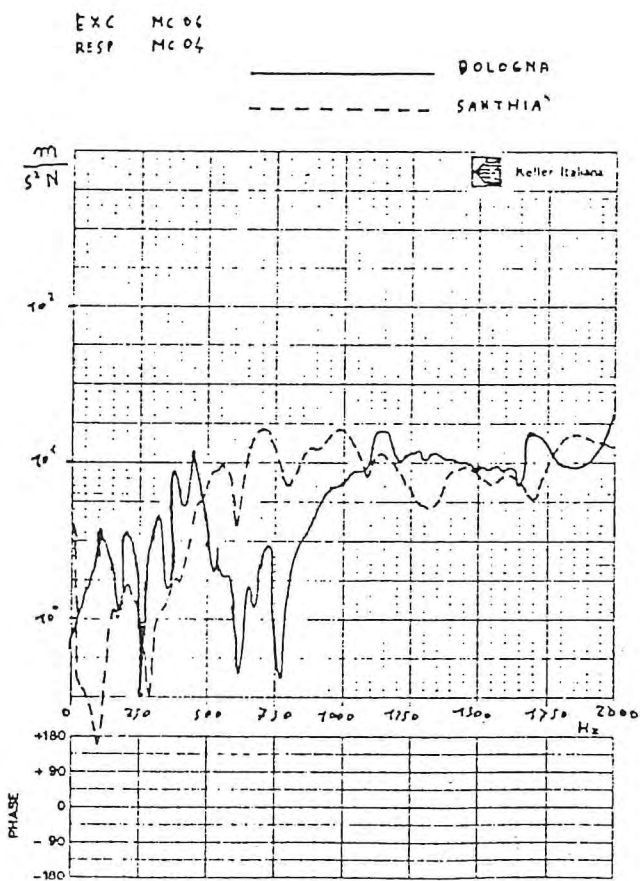
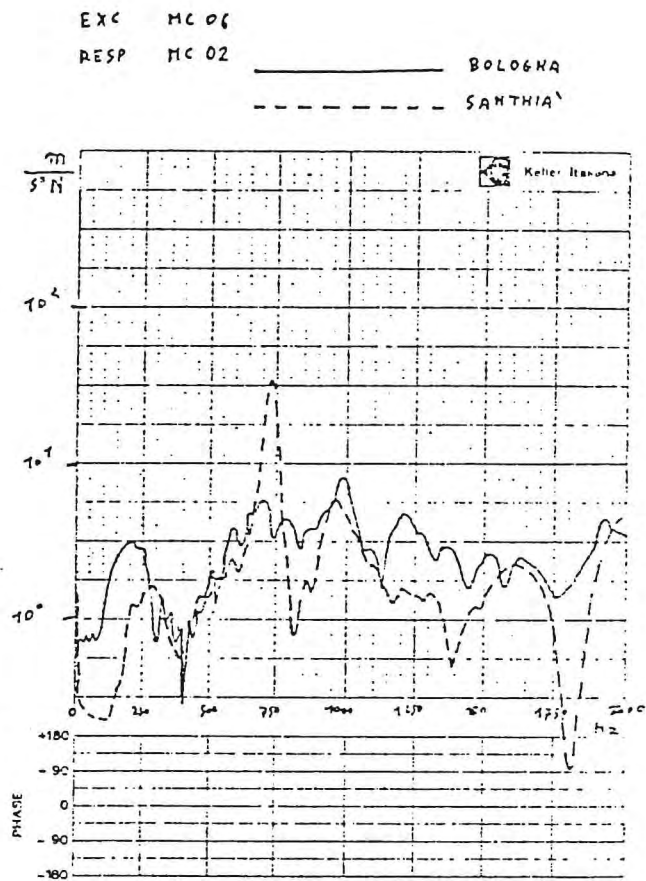
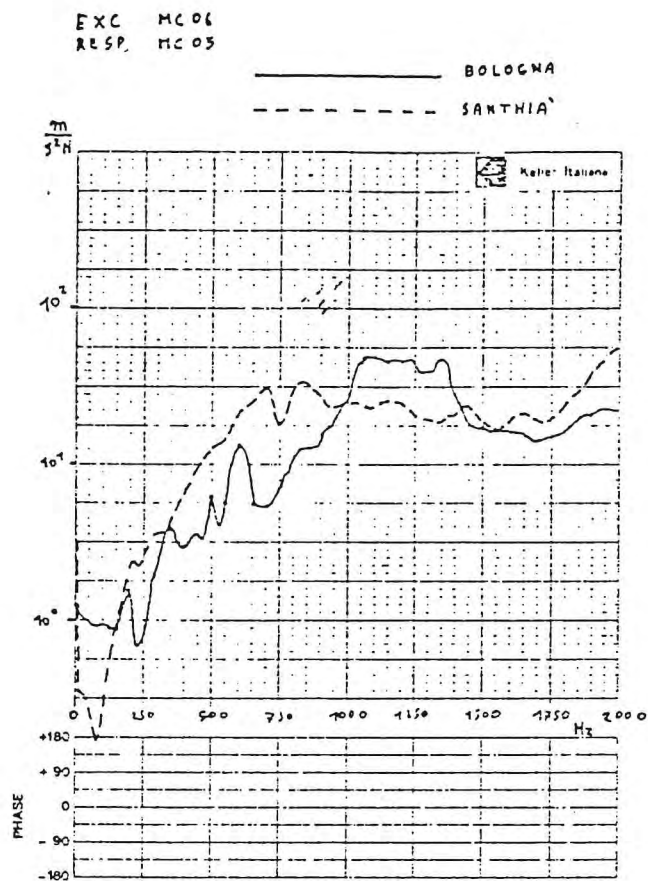
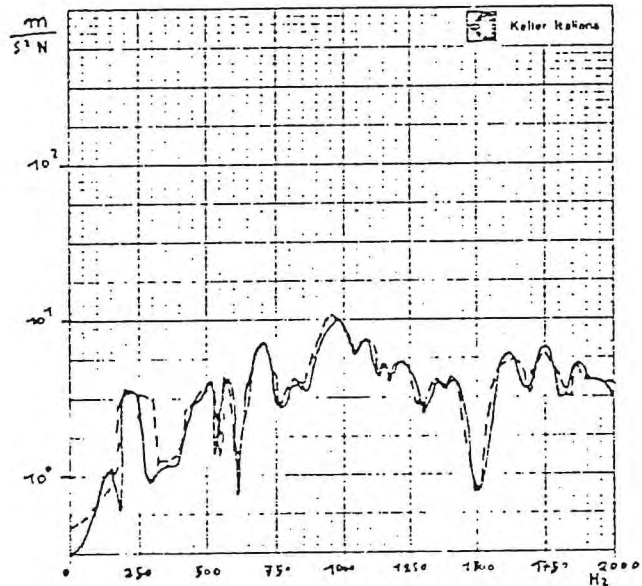


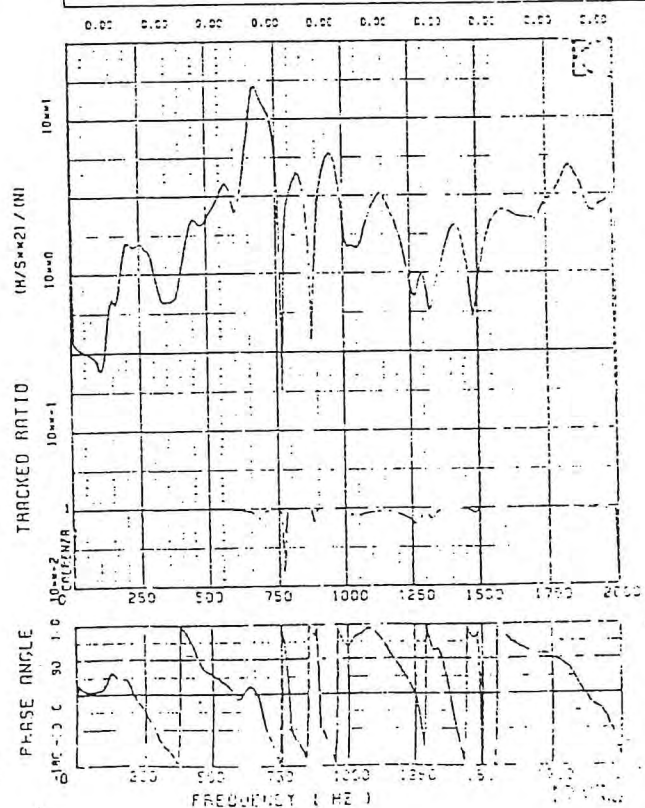
Fig. 46 - Verifica del principio di reciprocità per la funzione di trasferimento .

EXC MC 03
RESP MC 06

EXC MC 06
RESP MC 03



MODEL OF SAFETY CAB TELARIS D:\MC03\M0310 41
MODELLO SOSPESO, ECCITATO DALLI SUPPORTI CON MANTELLO, MOLLA E PNEUMATICO
STATE 0
RISPOSTA: MC03V+ ECCITAZIONE: MC06V+
21/ 8/1992 BANDA: 10.000



l'accelerometro e lo shaker. Come si vede la corrispondenza è ottima e dunque appare perfettamente lecito aver eseguito le misure sul modello lasciando fisso l'accelerometro in MC 06 e battendo col martello tutti gli altri punti.

Nella stessa Figura 46 appare anche il tracciato originale Keller, ottenuto a suo tempo con l'accelerometro nel punto MC 06 e percuotendo il punto MC 03; esso dovrebbe dunque coincidere con il tracciato continuo della prima figura, ed in effetti ci assomiglia abbastanza.

3-7-5 - Frequenze proprie della cavità a pareti rigide.

Per rendere rigide le pareti abbiamo immerso il modello in una cassetta di sabbia, in modo che i moti delle pareti venissero bloccati.

L'apparecchiatura usata è la stessa adottata per le prove con e senza il "guidatore" visibile

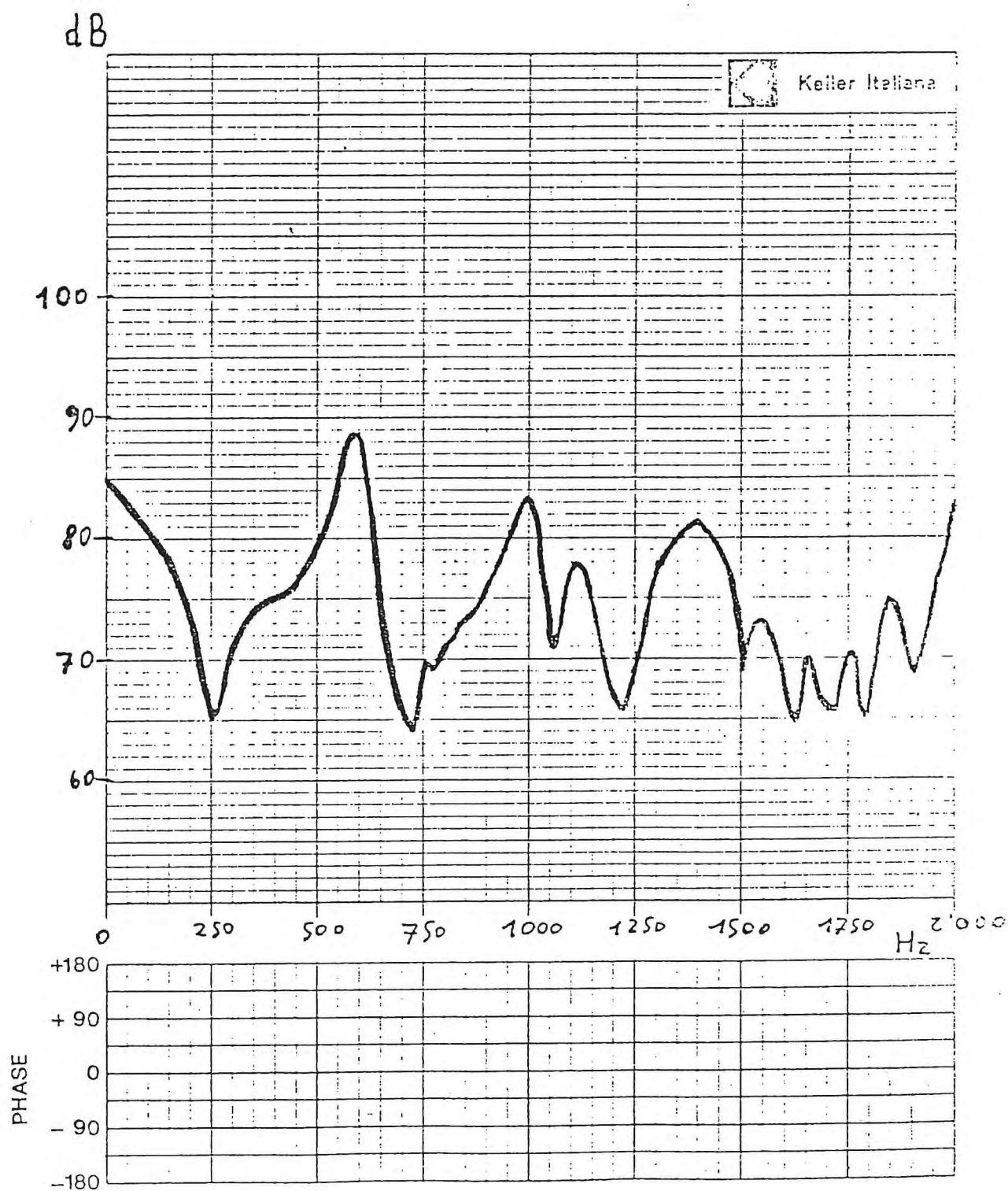
in Figura 36. In questo caso però il microfono veniva collocato nella posizione MIC 2, al contrario del caso predetto.

Il tracciato così ottenuto, visibile in Figura 47, ci servirà in seguito come confronto alle frequenze proprie della cavità a pareti rigide, calcolate teoricamente con metodi agli elementi finiti.

Possiamo comunque già notare la completa scomparsa del picco strutturale a 250 Hz, scomparsa dovuta evidentemente alla presenza della sabbia.

Notiamo anche come nella posizione MIC 2, al contrario delle misure eseguite con e senza il "guidatore", il segnale sia molto pulito, privo di zone disturbate o incerte e come alle basse frequenze si abbiano forti risonanze.

Fig. 47 - Frequenze proprie della cavità eccitata
acusticamente - modello immerso nella
sabbia - microfono in Mic 2 .



3-7-6 - Osservazione degli spettri prodotti dalla percuSSIONe di varie parti.

Con la stessa strumentazione descritta dalla Figura 34 abbiamo provveduto prima, durante e dopo la discussione degli altri risultati, ad estemporanee verifiche delle ipotesi fatte, alla ricerca delle parti strutturali responsabili di determinate risonanze, ecc.

In questo modo, oltre che ottenere la conferma di alcune teorie proposte, abbiamo anche notato che:

percuotendo il vetro anteriore, il lunotto, la parte inferiore della portiera si ottiene un picco sui 200 Hz; il picco si sposta sui 250 Hz percuotendo il tetto apribile, il vetro laterale posteriore destro (il sinistro produce il picco sui 200), la parte superiore delle portiere, il parafrangente destro (il sinistro lo produce sui 200); in generale, le parti destre producono un massimo sui 250, quelle sinistre sui 200.

Il vetro anteriore produce sempre lo stesso spettro ovunque venga percosso; in effetti il suo vincolamento è uniforme. Lo stesso non succede per il lunotto: lo spettro si incrementa alle basse frequenze percuotendo la zona alta centrale, poiché qui il vincolamento è scarso (dopo aver eliminato le cerniere).

Percuotendo il tetto apribile si riscontra un picco sui 1000 Hz, che non viene prodotto da nessun'altra parte. Il massimo assoluto dello spettro si ha sempre attorno ai 2500 Hz.

Percuotendo la parte anteriore della piattaforma si ha un massimo sugli 800 Hz.

Fischiano si nota che la cavità risuona bene sui 1250 Hz.

3-8 - RICERCA DELLE FREQUENZE PROPRIE DELLA CAVITA' CON IL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI.

In analogia a quanto preannunciato nel 1° capitolo, abbiamo deciso di realizzare un programma per il calcolo delle frequenze proprie della cavità a pareti rigide, dunque del tipo più semplice di quelli indicati nel paragrafo 1-7-1. Vista la particolare geometria della nostra cabina, abbiamo deciso di limitarci allo studio del problema piano, lungo una sezione della cabina stessa parallela agli assi verticale e longitudinale del veicolo. Nell'altra direzione (trasversale), infatti, la cabina ha pressoché ovunque la stessa dimensione lineare (circa 105 cm.), per cui, note le frequenze proprie di risonanza nelle altre direzioni, si ha:

(45)

$$f_{r \text{ tot}}^2 = f_{r \text{ trasv}}^2 + f_{\text{altre direzioni}}^2$$

e questo vale per tutte le possibili coppie di frequenze proprie.

Le $f_{r \text{ trasv}}$ si ottengono facilmente, come:

$$(46) \quad f_{\text{trasv}} = \frac{k \cdot c_0}{2L} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Nella quale L è la dimensione trasversale della cabina.

Restano dunque da determinare le frequenze nelle altre direzioni.

Siccome però le sezioni verti-longitudinali della cabina non hanno tutte la stessa forma, è stato necessario risolvere il problema per 2 diverse posizioni, sezione centrale (lungo l'asse longitudinale) e laterale (adiacente alla portiera). Vedremo poi come combinare i risultati.

Abbiamo quindi disegnato le 2 sezioni da stu-

diare e le abbiamo suddivise in elementi triangolari, con nodi solo nei vertici dei triangoli (così facendo è implicita l'ipotesi di interpolazione lineare lungo i lati degli elementi).

Nella Figura 48 sono visibili le 2 sezioni, divise in elementi, con la numerazione dei nodi ed i riferimenti cartesiani in cui sono state inserite. Grazie a questi 2 disegni e con un pò di pazienza, abbiamo preparato 2 "file", contenenti la numerazione degli elementi, nonché le coordinate cartesiane dei 3 vertici di ciascuno; questi dati sono stati infine introdotti nel programma fortran "femam" da noi realizzato basandoci su schemi preesistenti [15] e modificato nella visualizzazione dei risultati.

Il programma "femam" (visibile in Figura 49), utilizza una subroutine della libreria IMSL per la ricerca degli autovalori della matrice, mentre l'algoritmo di riempimento della stessa è molto

Fig. 48 - Reticoli di elementi finiti -

sez. centrale (in alto) e
sez. laterale (in basso) .

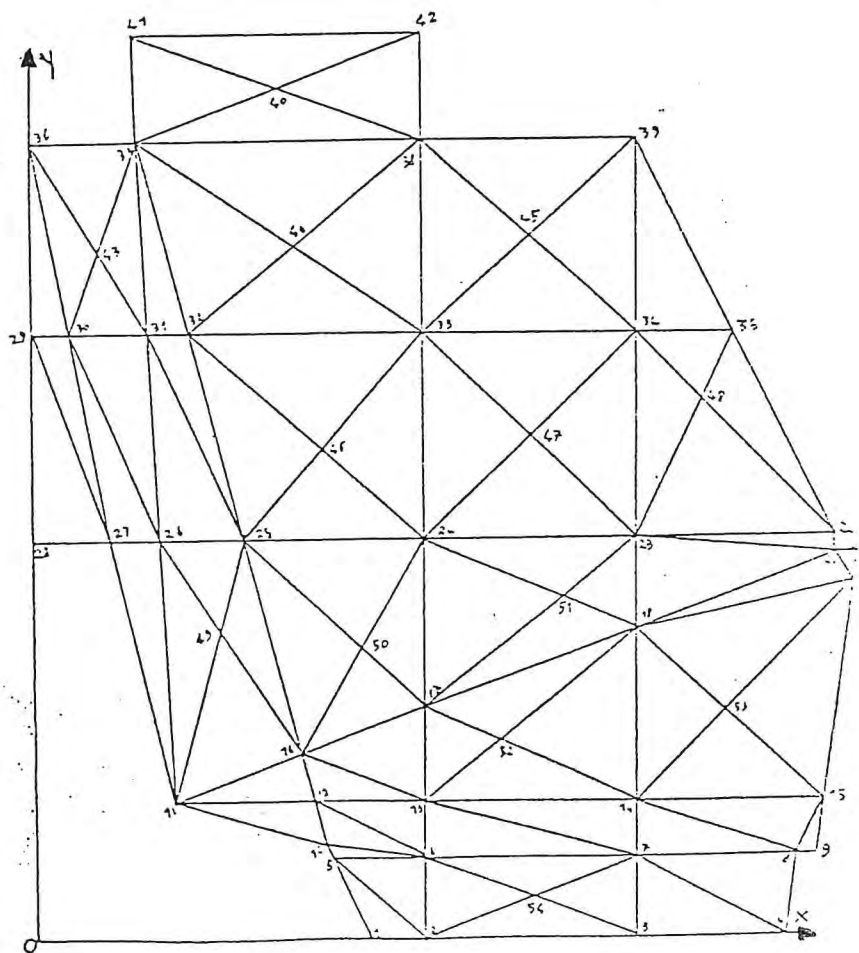
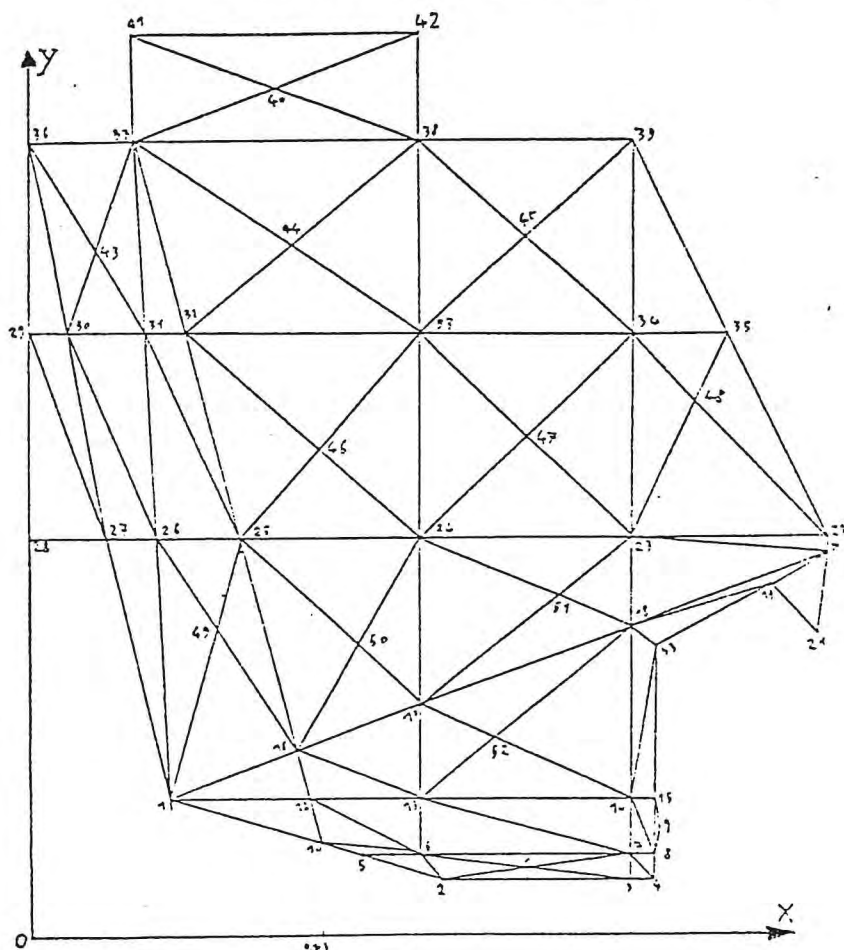


Fig. 49 - Programma FEMAM per il calcolo
con gli elementi finiti delle
frequenze proprie della cavità.

```

PROGRAM FEMAM
DIMENSION NODE(80,3),X(53),Y(53),VA(53,53),VB(53,53),
1 BETA(53),WK(53)
COMPLEX ALFA(53),Z(53,53),FREQ(53)
REAL STAMPA(58,40),CAR
COMMON/AREA1/ AR(80),PGR,NAXI
COMMON/AREA3/ FB(3,3)
COMMON/AREA2/ PA(3,3),X1,X2,X3,Y1,Y2,Y3
READ(4,100) NAXI
READ(4,100) NE,NN
READ(4,101) CO
READ(4,102) ((NODE(I,J),J=1,3),I=1,NE)
READ(4,103) ((X(I),Y(I),I=1,NN)
100 FORMAT(20I4)
101 FORMAT(2F16,5)
102 FORMAT(5(4X,3I4))
103 FORMAT(4(4X,2F8,3))
PGR=3.14159265
DO 2 I=1,NN
DO 2 J=1,NN
VA(I,J)=0.0
VB(I,J)=0.0
2 CONTINUE
DO 3 K=1,NE
X1=X(NODE(K,1))
X2=X(NODE(K,2))
X3=X(NODE(K,3))
Y1=Y(NODE(K,1))
Y2=Y(NODE(K,2))
Y3=Y(NODE(K,3))
RKAK=(X1+X2+X3)/3.0
CALL MATRPA(K)
CALL MATRFB(K)
DO 3 I=1,3
IR=NODE(K,I)
DO 3 J=1,3
IO=NODE(K,J)
VA(IR,IO)=VA(IR,IO)+PA(I,J)
VB(IR,IO)=VB(IR,IO)+PB(I,J)
3 CONTINUE
CALL EIGZF(VA,NN,VB,NN,NN,1,ALFA,BETA,Z,NN,WK,IER)
WRITE(6,264) IER
264 FORMAT(1X,' IER = ',I6)
DO 4 I=1,NN
FREQ(I)=ALFA(I)/BETA(I)
FREQ(I)=CSQRT(FREQ(I))
FREQ(I)=CO*FREQ(I)/(2.0*PGR)
4 CONTINUE
DO 5 I=1,NN
RF=REAL(FREQ(I))
IF (RF.LE.2000.0) GO TO 250
GO TO 5
250 WRITE(8,206) RF
WRITE(7,168) RF
DO 255 J=1,58
DO 255 K=1,40
255 STAMPA(J,K)= ' '
DO 254 J=1,NN
RZ=REAL(Z(J,I))
IF(RZ.GT.0.0) CAR='+'
IF(RZ.LE.0.0) CAR='- '
IF(RZ.GT.0.8) CAR='1'
IF((RZ**2).LE.0.01) CAR='0'
IF(RZ.LE.-0.8) CAR='*'
STAMPA(((X(J)*100.0+1.9512)+1.5),((Y(J)*100.0+1.195)+1.5))=CAR
254 CONTINUE
WRITE(8,280) ((STAMPA(J,(41-K)),J=1,58),K=1,40)
280 FORMAT(1X,58A1)
5 CONTINUE
200 FORMAT(1H1,11HFREQUENZA =,F10.2,3H Hz,///)
168 FORMAT(1H ,11HFREQUENZA =,F10.2,3H Hz)
STOP
END
SUBROUTINE MATRPA(K)
COMMON/AREA1/ AR(80),PGR,NAXI
COMMON/AREA2/ PA(3,3),X1,X2,X3,Y1,Y2,Y3
AR(K)=0.5*(X2*Y3+X1*Y2+X3*Y1-X2*Y1-X1*Y3-X3*Y2)
DO 1 J=1,3
DO 1 I=1,3
PA(I,J)=0.0
1 CONTINUE
A=1.0
IF(NAXI.NE.0) A=2.0*PGR*RBAR**2
PA(1,1)= ((Y2-Y3)*(Y2-Y3)+(X3-X2)*(X3-X2))/(4.0*AR(K))*A
PA(1,2)= ((Y3-Y1)*(Y2-Y3)+(X1-X3)*(X3-X2))/(4.0*AR(K))*A
PA(1,3)= ((Y1-Y2)*(Y2-Y3)+(X2-X1)*(X3-X2))/(4.0*AR(K))*A
PA(2,1)= ((Y3-Y1)*(Y3-Y1)+(X1-X3)*(X1-X3))/(4.0*AR(K))*A
PA(2,3)= ((Y1-Y2)*(Y3-Y1)+(X2-X1)*(X1-X3))/(4.0*AR(K))*A
PA(3,3)= ((Y1-Y2)*(Y1-Y2)+(X2-X1)*(X2-X1))/(4.0*AR(K))*A
DO 2 J=1,3
DO 2 I=1,J
IF (I.NE.J) PA(J,I)=PA(I,J)
2 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE MATRFB(K)
COMMON/AREA1/ AR(80),PGR,NAXI
COMMON/AREA3/ FB(3,3)
A=1.0
IF(NAXI.NE.0) A=2.0*PGR*RBAR**2
DO 1 I=1,3
DO 1 J=1,3
FB(I,J)= AR(K)/12.0*A
IF(I.EQ.J) FB(I,J)=FB(I,J)*2.0
1 CONTINUE

```

semplice viste le condizioni geometriche favorevoli.

Volutamente il campo d'indagine è stato limitato da 0 a 2000 Hz (abbiamo fatto riferimento alle dimensioni del modello, nel dare le coordinate cartesiane) e pertanto si ottiene un numero di frequenze proprie inferiore al numero dei nodi (mentre in realtà si dovrebbe sempre ottenere lo stesso numero di frequenze proprie).

Il risultato del programma è costituito da una tabella con l'elencazione delle frequenze proprie ottenute, seguita da una serie di disegni, mostranti per ogni frequenza, l'andamento delle pressioni sonore massime in ogni punto. Il valore della pressione sonora massima, indicata con Z , che varia convenzionalmente fra -1 e +1, viene dato per intervalli da caratteri di stampa diversi.

In Figura 50 sono riportate le tabelle iniziali prodotte dal programma "femam" per le 2 se-

Fig. 50

FREQUENZE PROPRIE DELLA CAVITA' - 53 NODI - CENTRALE

FREQUENZA = 1.02 Hz
 FREQUENZA = 786.42 Hz
 FREQUENZA = 635.33 Hz
 FREQUENZA = 1136.15 Hz
 FREQUENZA = 1241.17 Hz
 FREQUENZA = 1507.54 Hz
 FREQUENZA = 1628.49 Hz
 FREQUENZA = 1858.89 Hz

LEGENDA :

#	-1	< Z < -0.8
-	-0.8	< Z < -0.1
0	-0.1	< Z < 0.1
+	0.1	< Z < 0.8
1	0.8	< Z < 1

FREQUENZE PROPRIE DELLA CAVITA' - 54 NODI - LATERALE

FREQUENZA = 1.05 Hz
 FREQUENZA = 556.12 Hz
 FREQUENZA = 803.90 Hz
 FREQUENZA = 1195.32 Hz
 FREQUENZA = 1002.20 Hz
 FREQUENZA = 1463.43 Hz
 FREQUENZA = 1643.55 Hz
 FREQUENZA = 1611.07 Hz
 FREQUENZA = 1980.98 Hz

LEGENDA :

#	-1	< Z < -0.8
-	-0.8	< Z < -0.1
0	-0.1	< Z < 0.1
+	0.1	< Z < 0.8
1	0.8	< Z < 1

zioni, centrale e laterale. Si noti che, mentre nella sezione centrale sono risultate 8 frequenze proprie, nella sezione laterale ce ne sono 9.

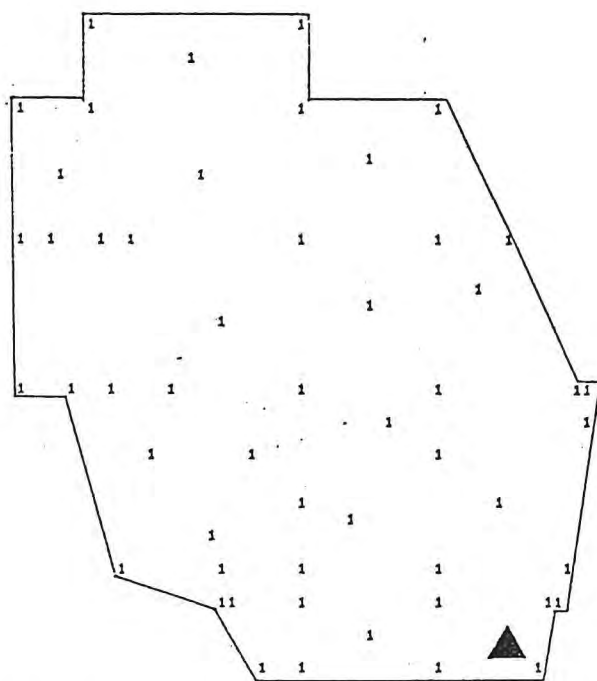
Nelle Figure 51, 52, 53, 54 e 55 sono riportati i disegni prodotti dal calcolatore e mostrandoti la distribuzione delle pressioni sonore nella cavità. Essi sono stati raggruppati a coppie, il superiore si riferisce alla sezione laterale, l'inferiore alla sezione centrale.

Si nota che, a frequenze corrispondenti, l'andamento delle pressioni sonore è analogo (a parte l'inversione di segno, che non è significativa). Sono state tratteggiate le linee nodali, luogo dei punti a pressione sonora nulla (sono anche indicate con un grosso triangolo, le posizioni dei microfoni MIC 2 e MIC 4).

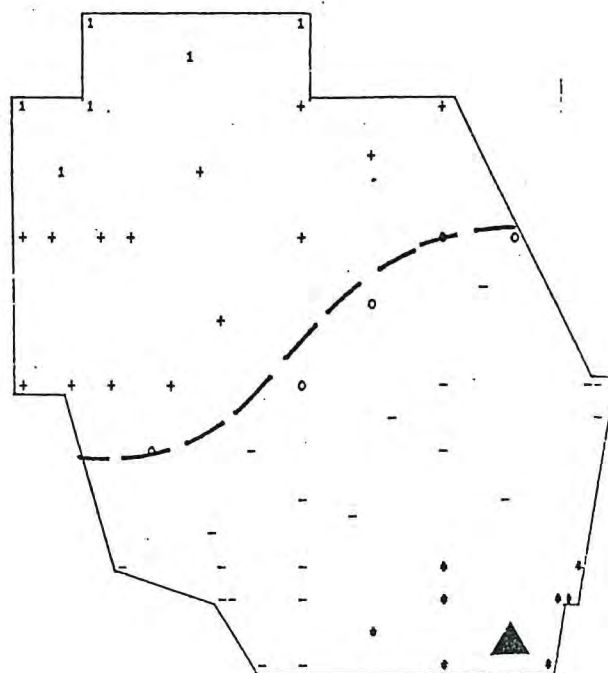
Solo la frequenza propria della Figura 55 non ha il corrispondente e questo perché essa è dovuta ad un modo con 4 inversioni che nella se-

Fig. 51 - Modi propri della cavità - sezione laterale (sopra) e centrale (sotto).

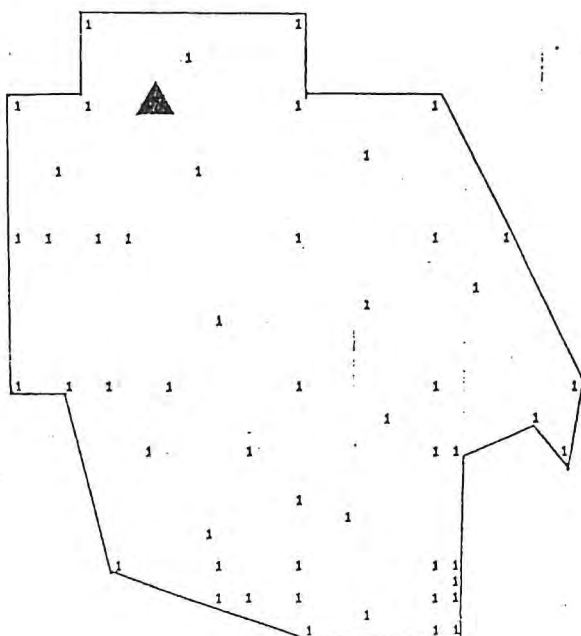
FREQUENZA = 1.05 Hz



FREQUENZA = 556.12 0.00 Hz



FREQUENZA = 1.02 Hz



FREQUENZA = 635.33 Hz

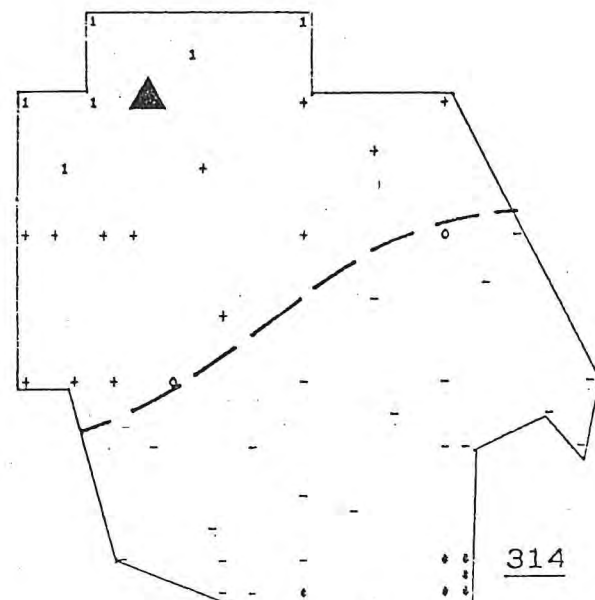
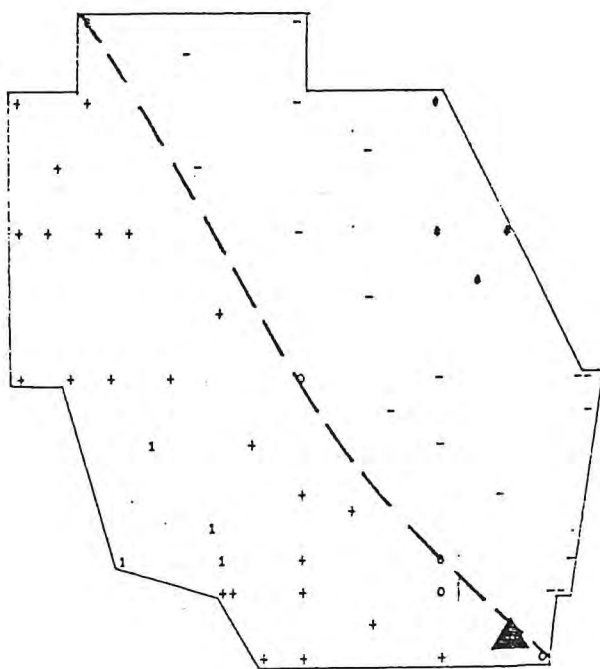
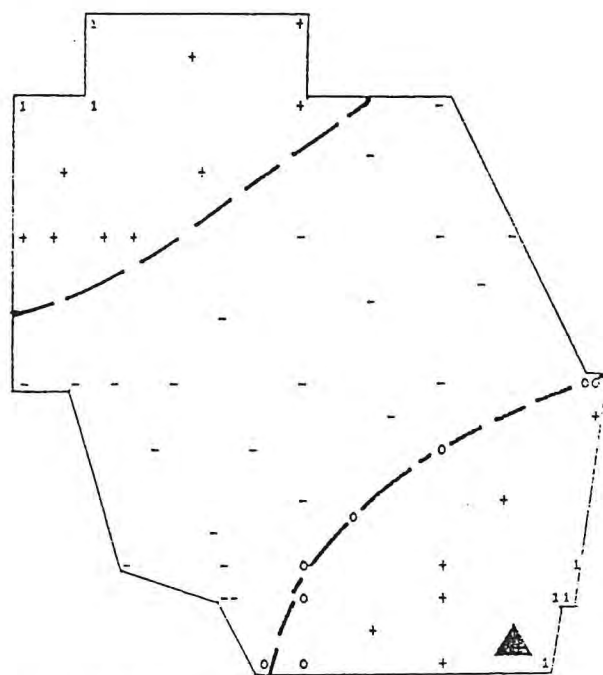


Fig. 52 - Modi propri della cavità - sezione
laterale (sopra) e centrale (sotto).

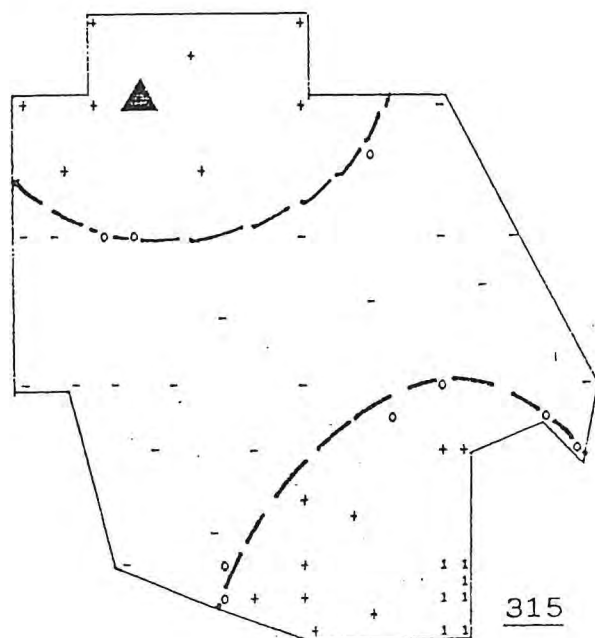
FREQUENZA = 803.90 0.00 Hz



FREQUENZA = 1002.20 0.00 Hz



FREQUENZA = 1136.15 Hz



FREQUENZA = 786.42 Hz

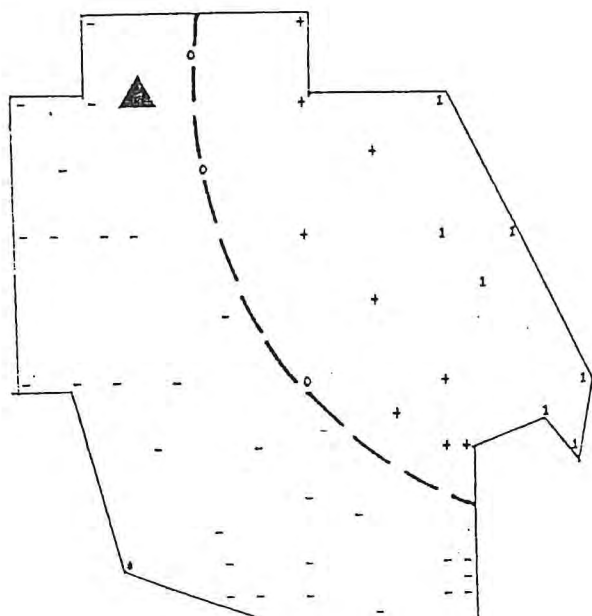
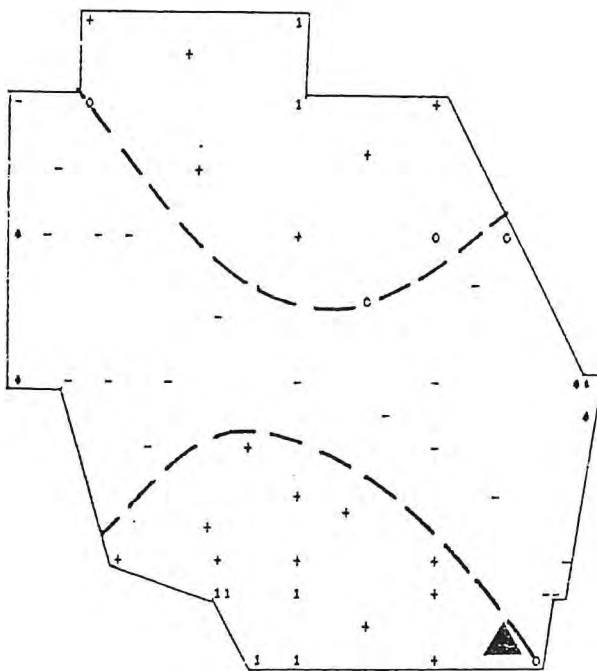
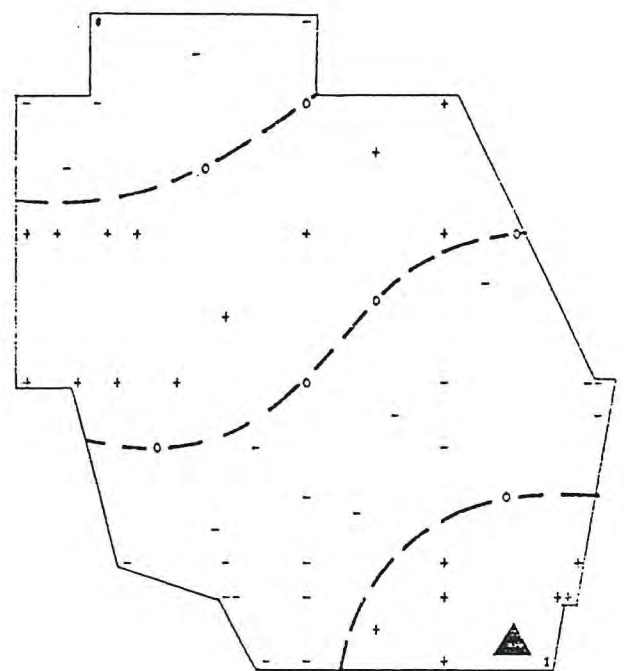


Fig. 53 - Modi propri della cavità - sezione laterale (sopra) e centrale (sotto).

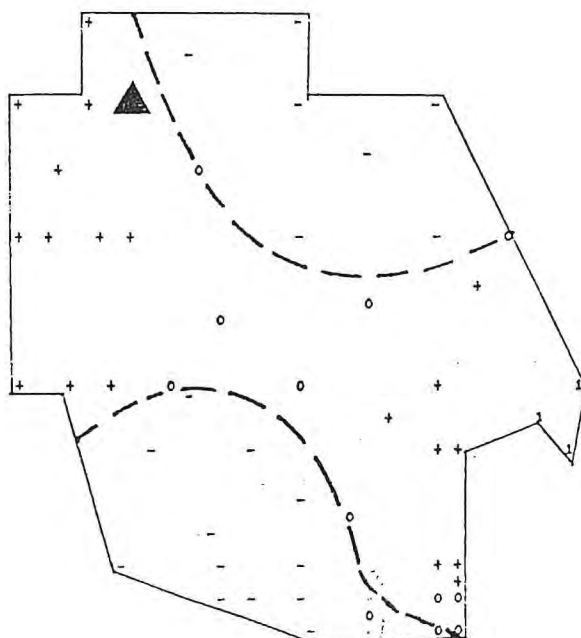
FREQUENZA = 1193.32 0.00 Hz



FREQUENZA = 1463.43 0.00 Hz



FREQUENZA = 1241.17 Hz



FREQUENZA = 1507.54 Hz

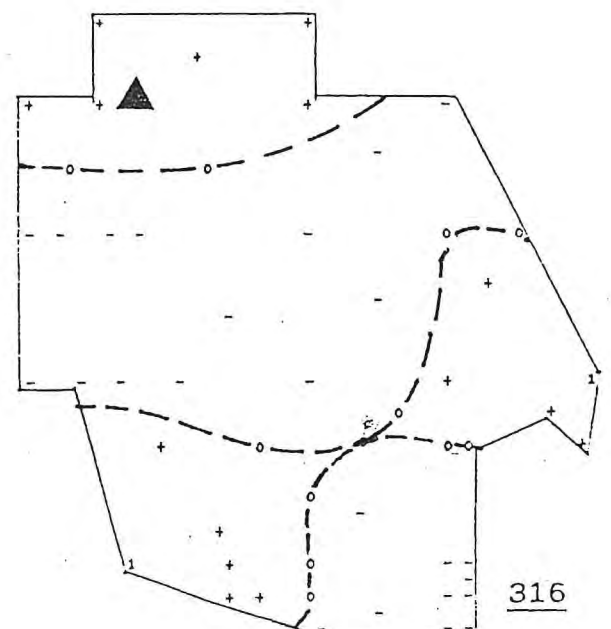
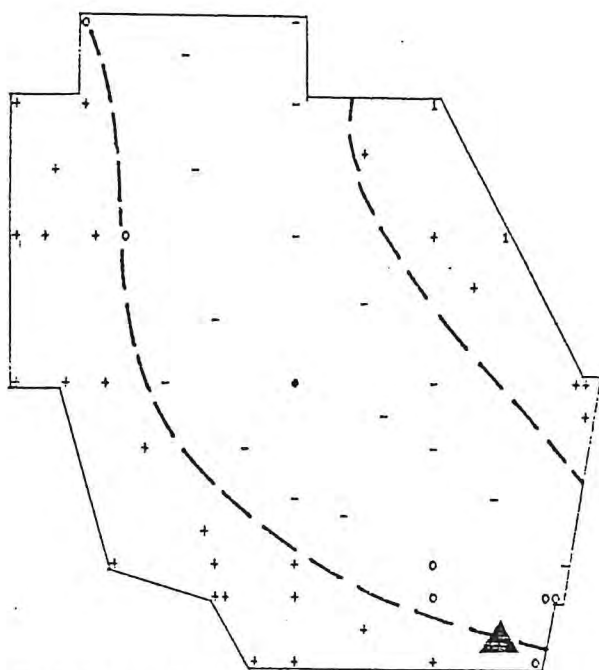
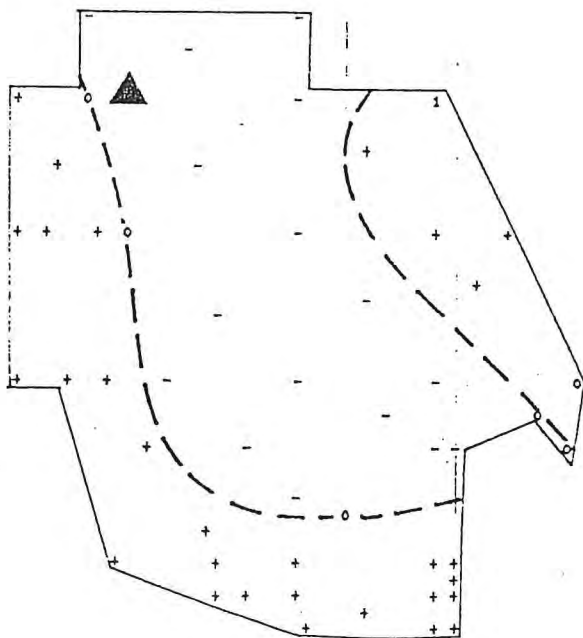


Fig. 54 - Modi propri della cavità - sezione
laterale (sopra) e centrale (sotto).

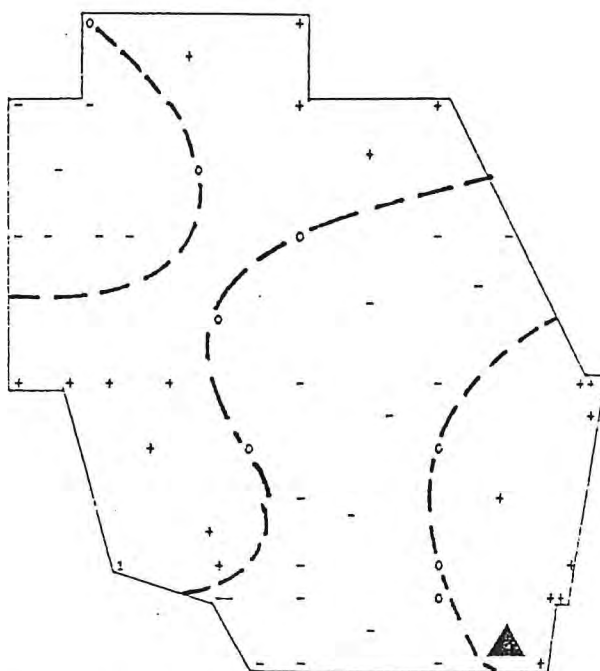
FREQUENZA = 1611.07 0.00 Hz



FREQUENZA = 1628.49 Hz



FREQUENZA = 1643.55 0.00 Hz



FREQUENZA = 1852.89 Hz

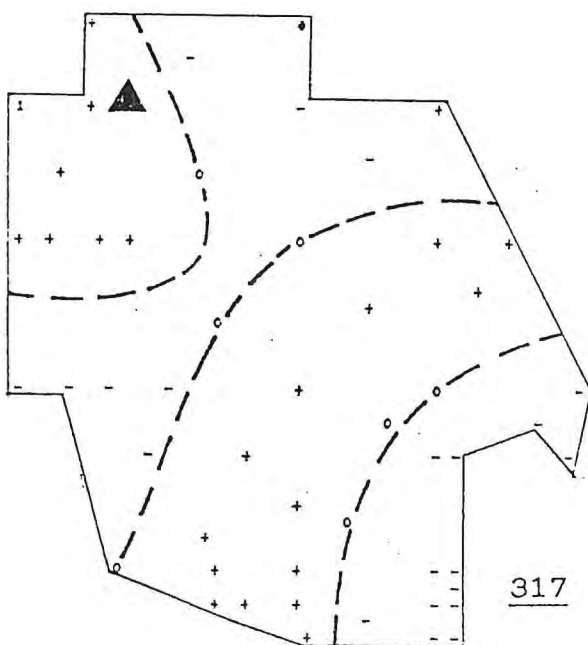
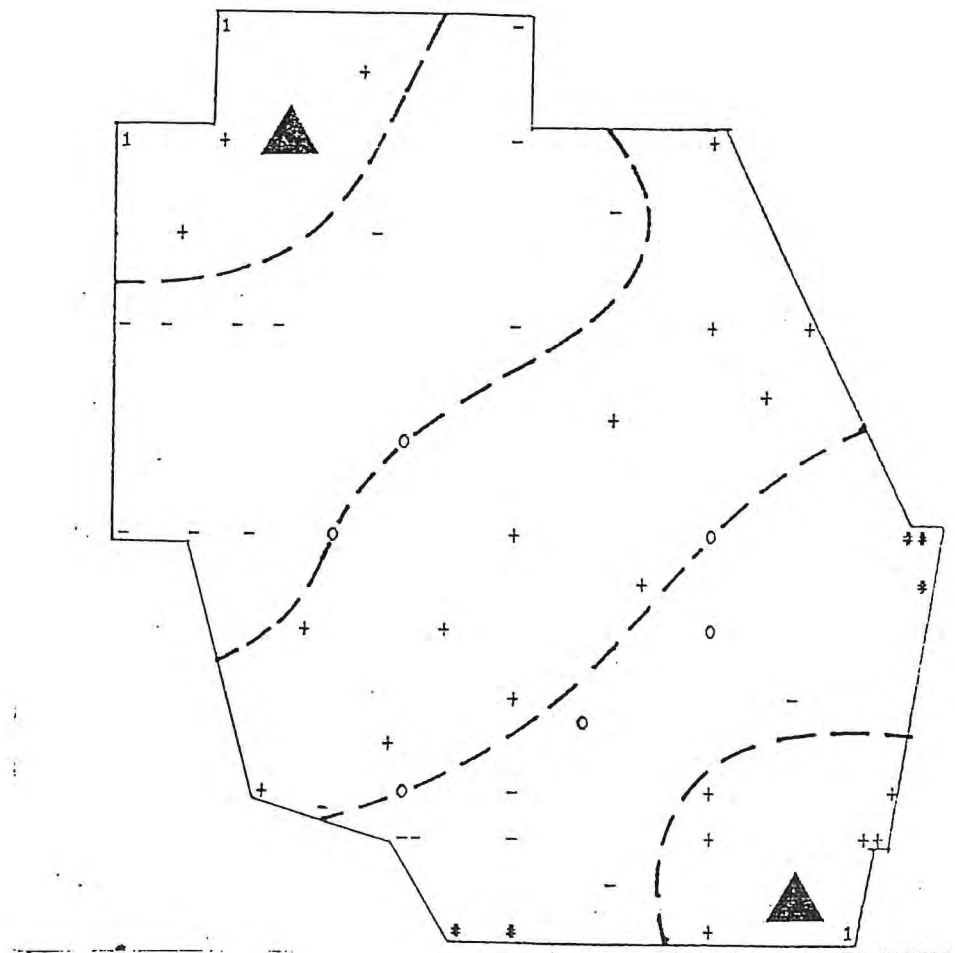


Fig. 55 - Ultimo modo proprio della
sezione laterale .

FREQUENZA = 1980.98 0.00 Hz



zione centrale avviene probabilmente ad una frequenza superiore ai 2000 Hz, in analogia con quanto accade per gli altri modi.

Comunque è possibile vedere che le frequenze così ottenute non sono molto dissimili da quelle che si sarebbero potute ipotizzare dall'inserimento grafico di una mezz'onda, un'onda intera, ecc., nelle 2 direzioni diagonali della cabina.

E' interessante anche la prima frequenza propria, che è degenera e corrisponde ad una pressione sonora uniforme (idrostatica). In teoria si dovrebbe ottenere questa soluzione per una frequenza di 0 Hz, invece il risultato è di circa 1 Hz e ciò mostra che gli errori cumulativi del procedimento di calcolo producono alla fine uno scarto di questo ordine di grandezza, dunque più che accettabile.

Infine calcoliamo per i primi 3 modi proprie le frequenze dell'intera cavità, considerando an-

che la 3.a dimensione della cabina, che nel modello misura 21 cm.

Servendoci della formula (45), abbiamo:

(47)

$$f_{t1} = 809,5$$

$$f_{t2} = 1619,04$$

$$f_{t3} = 2428,57$$

Consideriamo dunque le prime due e procediamo facendo la media delle frequenze laterale e centrale ed introducendo il valore nella (45); il calcolo produce i risultati in Figura 56.

Fig. 56

FREQUENZE TOTALI DELLA CABINA

1.0 Hz	809.5 Hz	1619.5 Hz
595.7 Hz	1005.1 Hz	1725.6 Hz
795.2 Hz	1134.7 Hz	1804.2 Hz
1069.2 Hz	1341.1 Hz	1940.6 Hz
1218.2 Hz	1462.7 Hz	2026.5 Hz
1485.5 Hz	1691.7 Hz	2197.6 Hz
1619.8 Hz	1810.8 Hz	2290.5 Hz
1751.2 Hz	1929.3 Hz	2385.3 Hz

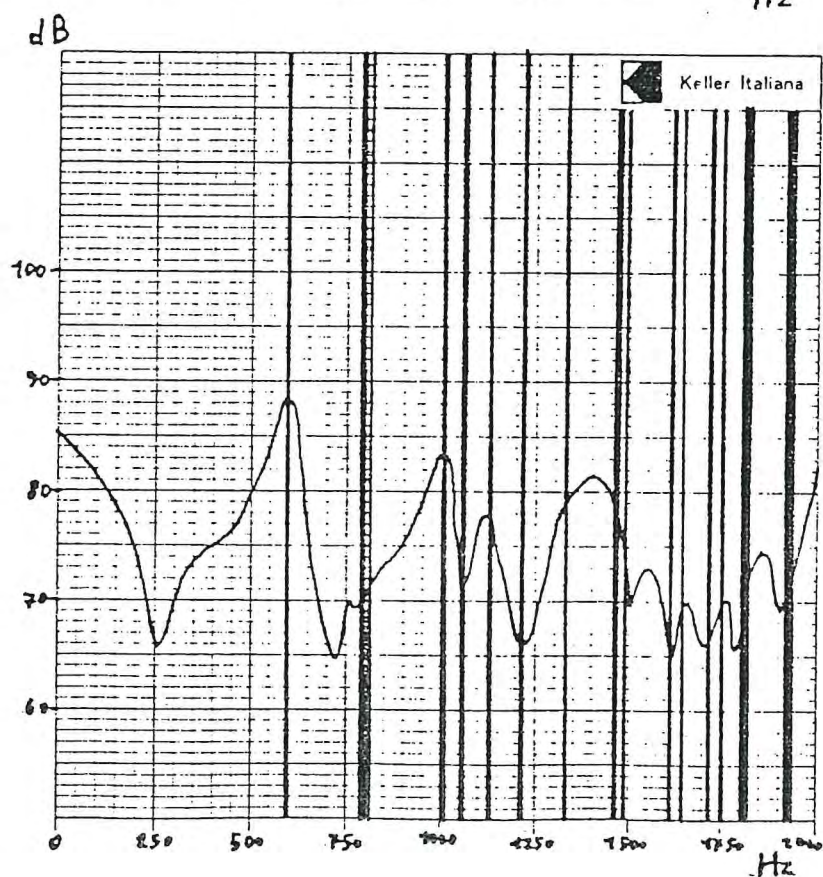
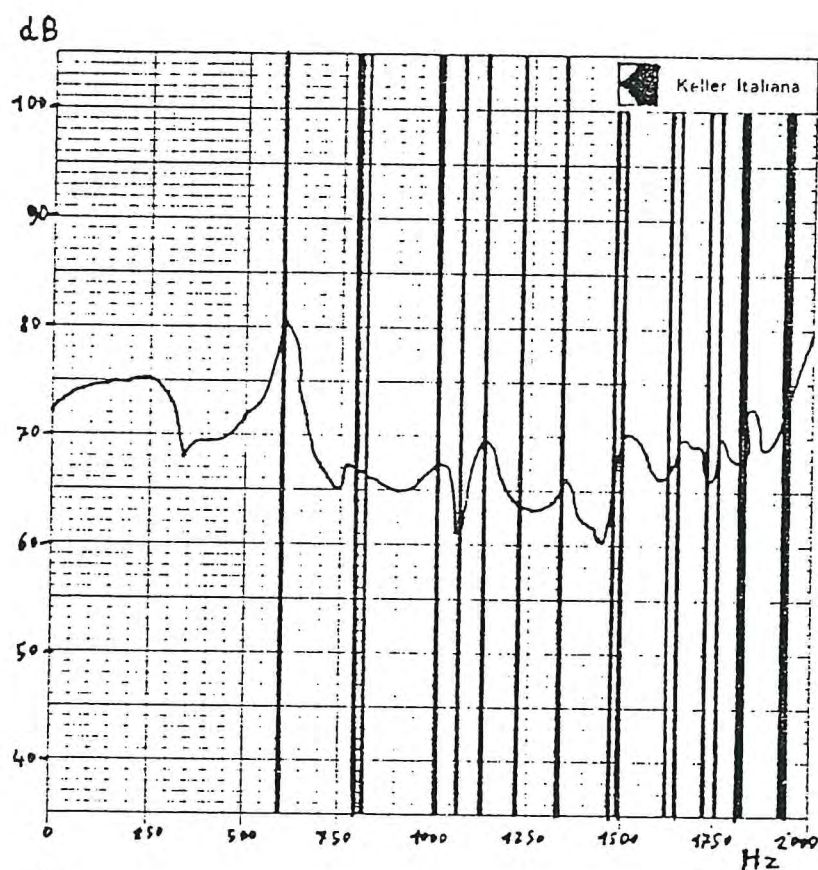
Si nota che, pur combinando frequenze tutte comprese entro i 2000 Hz, alcune frequenze prodotte sono al di sopra di questo limite.

Confrontiamo ora le frequenze ottenute con le frequenze proprie della cavità (a pareti rigide, dunque nella sabbia) ottenute sperimentalmente. In Figura 57 compaiono i tracciati relativi al MIC 2 ed al microfono nella posizione vicino al "piede destro del guidatore" (MIC 4). Su di essa è stata disegnata una banda verticale nera in corrispondenza di ognuna delle frequenze proprie teoriche.

Si vede che le 2 frequenze di 595 Hz (corrispondenti al 1° modo "piano" delle sezioni fatte) e di 1005 Hz (che è la combinazione dello stesso 1° modo piano, con il primo modo trasversale) sono perfettamente corrispondenti a 2 picchi dei diagrammi.

La frequenza di 809 Hz (1° modo trasversale)

Fig. 57 - Confronto fra le frequenze calcolate con gli elementi finiti e i tracciati ottenuti dal Mic 4 (sopra) e dal Mic 2 (sotto) .



è visibile solo nel tracciato del microfono in basso a destra, poiché essendo il MIC 2 posto al centro, esso finisce nel nodo dell'onda stazionaria corrispondente.

Anche il picco dei 1134 Hz (2° modo piano combinato col 1° modo trasversale) appare ben individuato sui tracciati. Viceversa, la frequenza di 1069 Hz corrisponde in entrambi i casi ad un "buco" dei diagrammi; notiamo però che essa era stata ottenuta come "media" delle 2 frequenze "piane" di 1002 e 1136 Hz e che in corrispondenza di entrambi questi valori il picco è presente.

Appare dunque poco lecita l'approssimazione introdotta nel calcolare le frequenze "piane" con media aritmetica delle 2 sezioni laterale e centrale, almeno in quei casi, come quello indicato, nei quali i 2 valori sono tanto dissimili da dare luogo a 2 picchi distinti.

Dobbiamo dunque evincere che, nella Figura 56, sono da scartare le frequenze: 1069,2 e 1751

(e quelle sulle corrispondenti righe, prodotte per combinazione con le trasversali).

Anche la frequenza 1218 Hz non appare azzeccata; ciò probabilmente è dovuto al fatto che essa discende da un modo piano poco stabile (esso è rappresentato nella parte sinistra dalla Figura 53 e che tra l'altro ha le linee nodali prossime alle posizioni dei microfoni).

Ragionando in analogia a ciò, possiamo pensare che non siano stati rilevati tutti quei modi che traggono origine da distribuzioni di pressione tali da dare linee nodali ove si trovavano i microfoni.

In pratica la posizione dei microfoni è tale che vengono rilevati bene i modi lungo la diagonale più lunga della cabina, mentre gli altri risultano per forza attenuati, per via della vicinanza delle linee nodali ai microfoni.

Secondo queste considerazioni occorrerebbe

scartare queste frequenze (e le corrispondenti, ottenute da esse per combinazione con le frequenze trasversali, che si trovano, in Figura 56, sulla stessa riga): 795 Hz; 1218 Hz; 1619 Hz; inoltre anche la 1751 Hz appare dubbia; infatti, sebbene rappresenti un modo secondo la diagonale più lunga, esso ha le linee nodali vicine ai microfoni.

Dopo aver eliminato tutte le frequenze dette per i motivi visti, la situazione rimane questa:

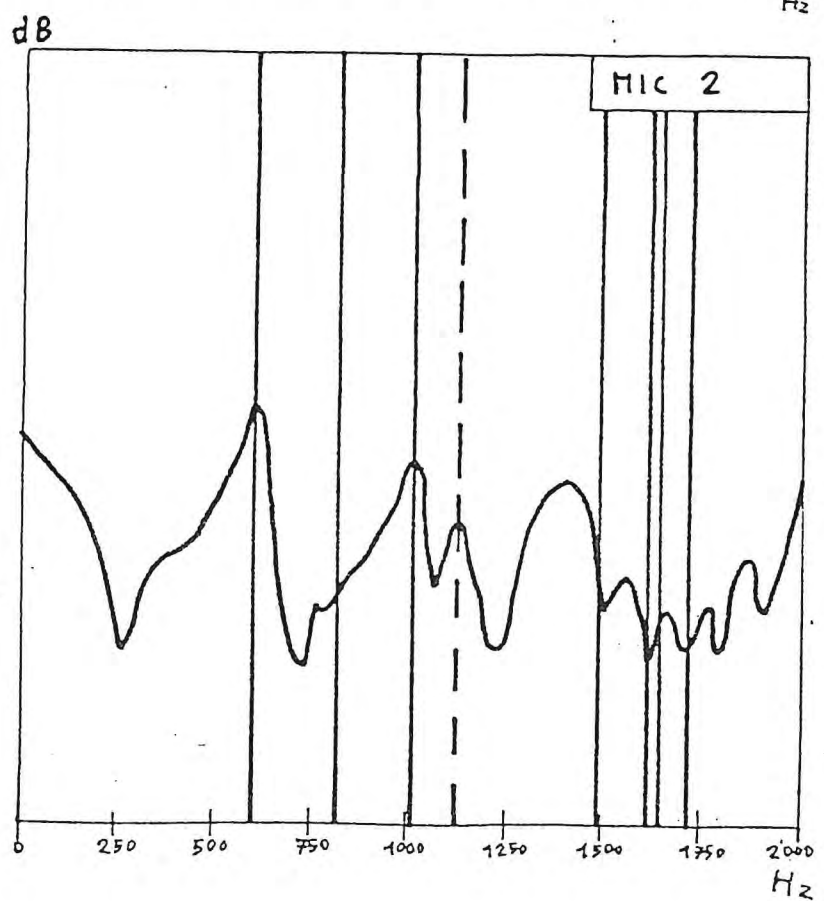
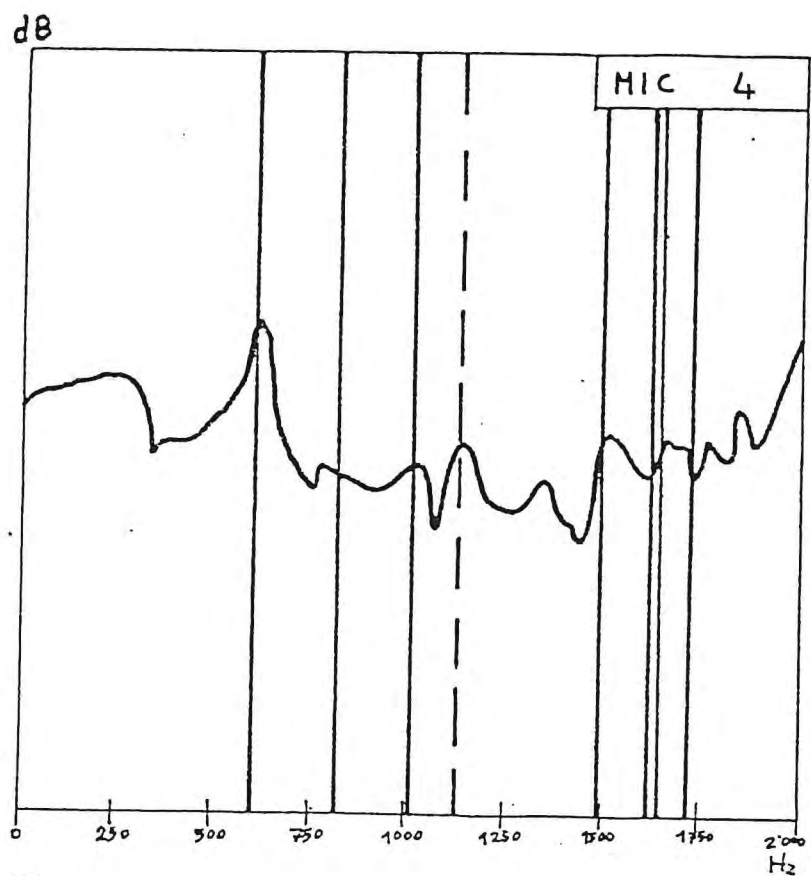
Fig. 58

FREQUENZE TOTALI DELLA CABINA

1.0 Hz	809.5 Hz	1619.5 Hz
595.7 Hz	1005.1 Hz	1725.6 Hz
1485.5 Hz	1691.7 Hz	2197.6 Hz

che viene riprodotta graficamente in Figura 59; in essa è stata indicata con una riga tratteggiata la frequenza teorica di 1134 Hz, la quale, pur essendo stata scartata perché prodotta da un modo

Fig. 59 - Confronto fra le frequenze teoriche della cavità e i tracciati sperimentali .



"piano" secondo la diagonale più breve, è poi in effetti presente in modo evidente nei diagrammi.

Non siamo però in grado di affermare che questo picco sia dovuto effettivamente ad un modo quale quello da noi supposto (1° modo piano secondo la diagonale più corta, sommato al 1° modo trasversale), poiché esso potrebbe trarre origine da numerose altre combinazioni di onde stazionarie.

Per stabilire esattamente come vanno le cose, occorrerebbe eccitare la cavità a questa frequenza e poi, muovendo il microfono all'interno, cercare le superfici nodali.

Per concludere possiamo dunque affermare che il metodo agli elementi finiti, anche se usato in modo estremamente grossolano come noi abbiamo fatto, permette di individuare con buona precisione i primi due o tre modi propri di una cavità a pareti rigide.

Inoltre il confronto fra i tracciati ottenuti nella sabbia e fuori ci ha consentito di confermare che le frequenze proprie della cavità, sollecitata acusticamente, sono pressoché identiche sia che le pareti siano mobili oppure rigide.

3-9 - DISCUSSIONE DEI RISULTATI

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che complessivamente sono state eseguite queste misure:

- a) funzioni di risposta in frequenza del prototipo;
- b) funzioni di trasferimento del prototipo;
- c) funzioni di risposta in frequenza del modello;
- d) funzioni di trasferimento del modello;
- e) frequenze proprie della cavità del modello a pareti rigide eccitate acusticamente;

f) calcolo agli elementi finiti delle frequenze proprie della cavità.

In base a queste misure dovremo ottenere tutte le indicazioni utili che cerchiamo.

3-9-1 - Risultati ottenuti dal modello.

Consideriamo per ora le misure c), d), e), f), tutte riferite al modello; mettiamoci nei panni del progettista e vediamo quali conclusioni è possibile trarre da esse.

I nostri scopi sono:

- 1) individuare le frequenze proprie della cavità;
- 2) individuare le frequenze proprie della struttura;
- 3) controllare che esse si sovrappongano il meno possibile;
- 4) individuare le parti strutturali da modificare

per ottenere lo sfasamento delle frequenze proprie, quando esso manchi.

Il punto 1) è il più facile, poiché dalle Figure 57-59 si evince chiaramente che esistono queste frequenze proprie della cavità 600 Hz, 1010 Hz e 1130 Hz. A frequenze superiori niente può essere detto di certo, tranne che il campo acustico si avvicina alle condizioni di campo riverberante, ma esistono ancora onde stazionarie di piccola lunghezza d'onda per cui basta spostare di poco il microfono per ottenere tracciati diversi.

Dobbiamo ora confrontare il grafico ottenuto con la cabina eccitata acusticamente con un grafico della funzione di risposta in frequenza. Scegliamo dunque la posizione MIC 2, poiché è qui che abbiamo eseguito la misura con eccitazione acustica e scegliamo il punto di eccitazione MC 06, poiché abbiamo rilevato, con lo stesso punto di eccitazione, anche numerosi tracciati della

funzione di trasferimento, che ci serviranno per individuare le frequenze strutturali.

La sovrapposizione di questi due grafici è visibile in Figura 60 e si nota chiaramente che:

- i picchi a 600, 1010, 1130 Hz compaiono in entrambi i grafici (sono della cavità);
- compare un picco abbastanza evidente a 710 Hz, mancante del tutto nel tracciato ottenuto con eccitazione acustica (è un picco di origine strutturale);
- a frequenze superiori ai 1250 Hz i tracciati si discostano sensibilmente, segnalando il sovrapporsi di numerose frequenze strutturali.

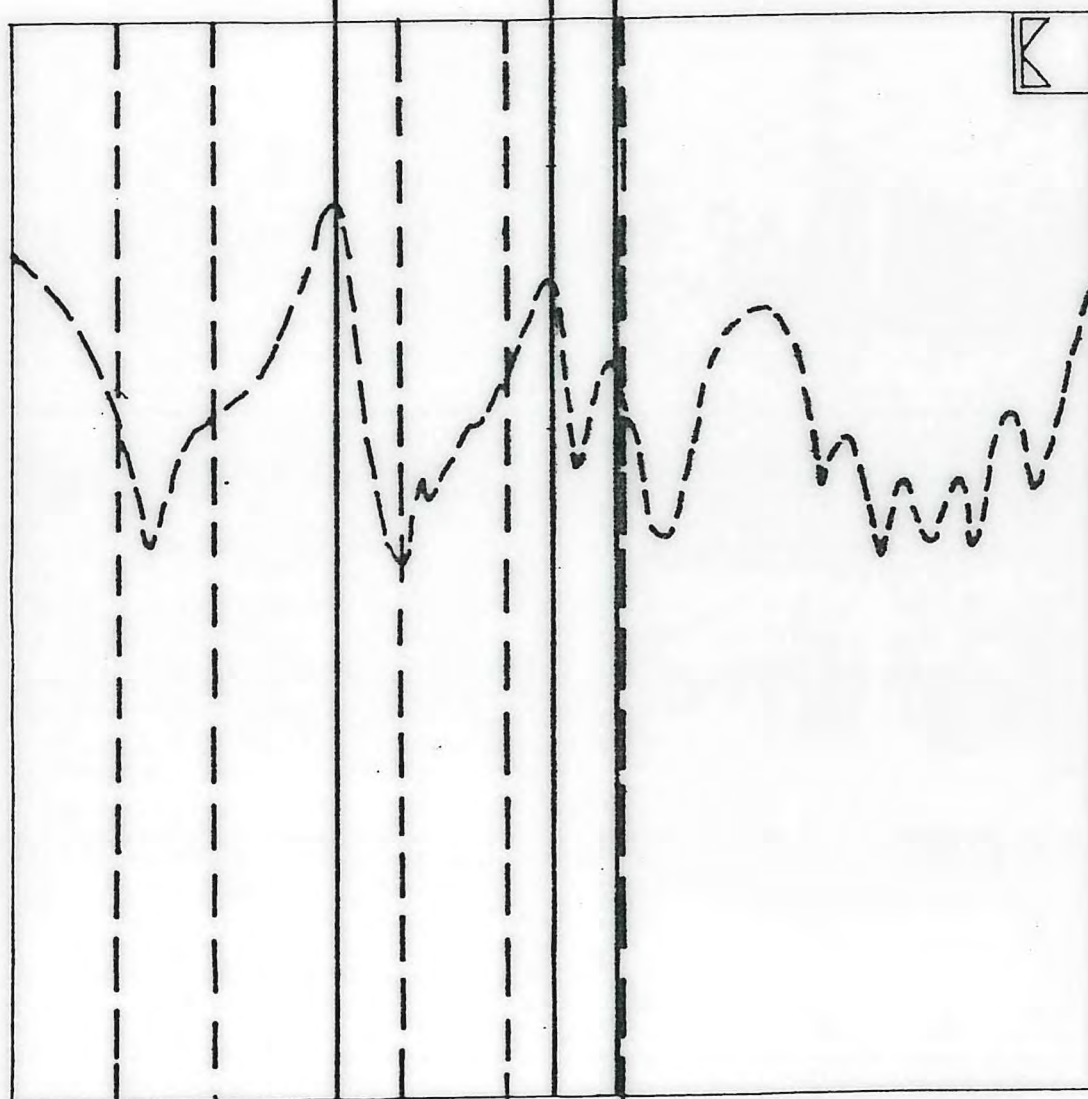
Vediamo dunque di capire da dove viene il picco dei 710 Hz; osservando ancora la Figura 57, in basso, notiamo che in teoria dovrebbero esserci due frequenze proprie della cavità, una a 795 Hz e l'altra a 809 Hz, corrispondenti rispettivamente al primo modo secondo la diagonale corta e al pri-

----- Risposta in MIC 2 - Eccitazione
acustica

600

1010 1130

**frequenze
della cavita'**



**frequenze
strutturali**

200 370

710 920

1130

CONTANTE SIN.

CONTANTE SIN.

TRAVERSA ANT.

TRAVERSA ANT.

TRAVERSA ANT.

Fig. 60

MODEL OF SAFETY CAB

TELAIO

O/MIC.2./820/ 14

MODELLO SOSPESO, ECCITATO SUI SUPPORTI CON MARTELLO, MEDIA 5 MISURE

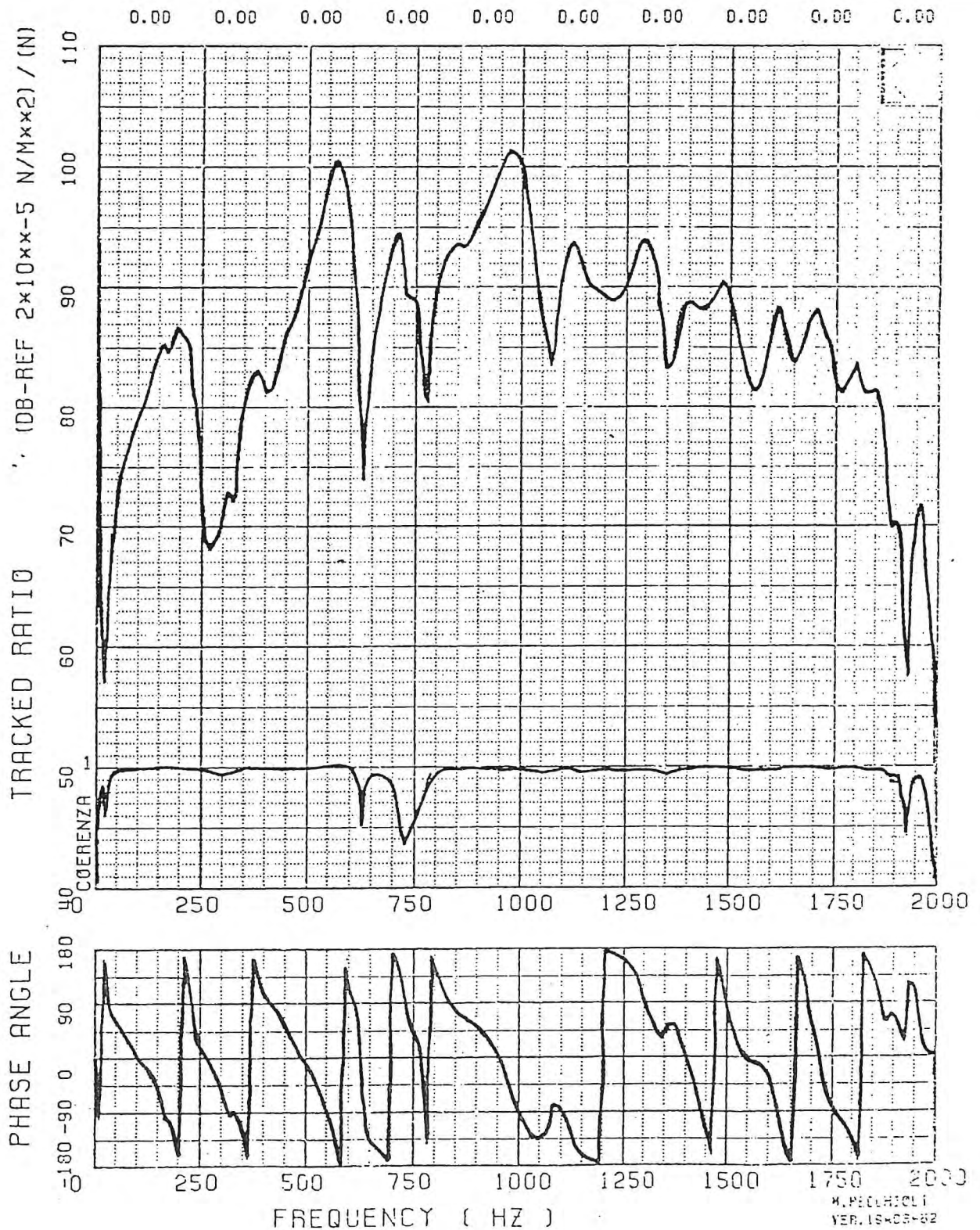
RISPOSTA: MIC.2.

STATE : 0

ECCITAZIONE: MC06V+

21/ 4/1982

BANDWIDTH : 10.00HZ



mo modo laterale (o trasversale, che dir si voglia).

Osservando però la Figura 52, a sinistra, ci siamo resi conto che la prima frequenza propria non è stata rilevata perché le linee nodali passano proprio nei punti ove abbiamo collocato i microfoni e l'altoparlante; analogo discorso può essere fatto per la seconda, considerando come la simmetria della cavità faccia sì che il piano di mezzeria verticale-longitudinale sia luogo di punti nodali per i modi di vibrazione trasversale pari (quale quello che stiamo considerando).

Dunque non resta che concludere che il picco a 710 Hz è di origine strutturale.

Consideriamo ora la fase indicata in Figura 60 per il tracciato continuo. Notiamo che a 600 Hz lo sfasamento è di 180° e ciò è facilmente spiegabile osservando la Figura 51 e notando che la sollecitazione meccanica fa sollevare la parte

anteriore della piattaforma di base (grosso modo nella zona del MIC 4), creando dunque qui pressione positiva, mentre il MIC 2 si viene a trovare in una zona di pressione negativa, e dunque è sfasato di 180° rispetto alla sollecitazione esterna.

Identico discorso può essere fatto per la frequenza di 1000 Hz, ove lo sfasamento è quasi nullo, in accordo con la Figura 52, destra, che vuole le zone sollecitanti e di ascolto con pressioni dello stesso segno.

Il picco a 1130 Hz appare invece sfasato di -90° , ma questo non ci dice molto, poiché questa frequenza è data dalla sovrapposizione del secondo modo diagonale (795 Hz) con il primo modo trasversale (800 Hz) ed entrambi questi due modi originali sono poco evidenti.

Non appare insensato pensare che questo picco possa avere un'altra origine, purtuttavia notiamo che esso appariva anche nei tracciati ottenuti

con la cabina immersa nella sabbia, per cui non è certamente di origine puramente strutturale.

Ricordiamo però che a 1136 Hz esisteva una risonanza per la parte centrale della cavità, ben visibile in Figura 52 in basso a destra; dal disegno appare che la zona centrale della piattaforma si trova in concordanza di fase con il microfono.

Possiamo dunque pensare, per giustificare lo sfasamento di -90° , che la parte centrale della piattaforma (cioè il punto MC 04) si muova, a questa frequenza, con uno sfasamento appunto di 90° rispetto al punto di sollecitazione, e che il campo acustico conservi questo sfasamento.

Come conferma, esaminiamo in Figura 61 il tracciato che lega i punti MC 06 e MC 04: a 1130 Hz la fase è appunto a -90° , come per il MIC 2, ed esiste un discreto picco nella funzione di trasferimento, che segnala una frequenza propria strutturale della piastra di base.

Fig. 61

MODEL OF SAFETY CAB

TELAIO

O/MC04V+/820/ 23

MODELLO SOSPESO, ECCITATO SUI SUPPORTI CON MARTELLO, MEDIA 5 MISURE

RISPOSTA:

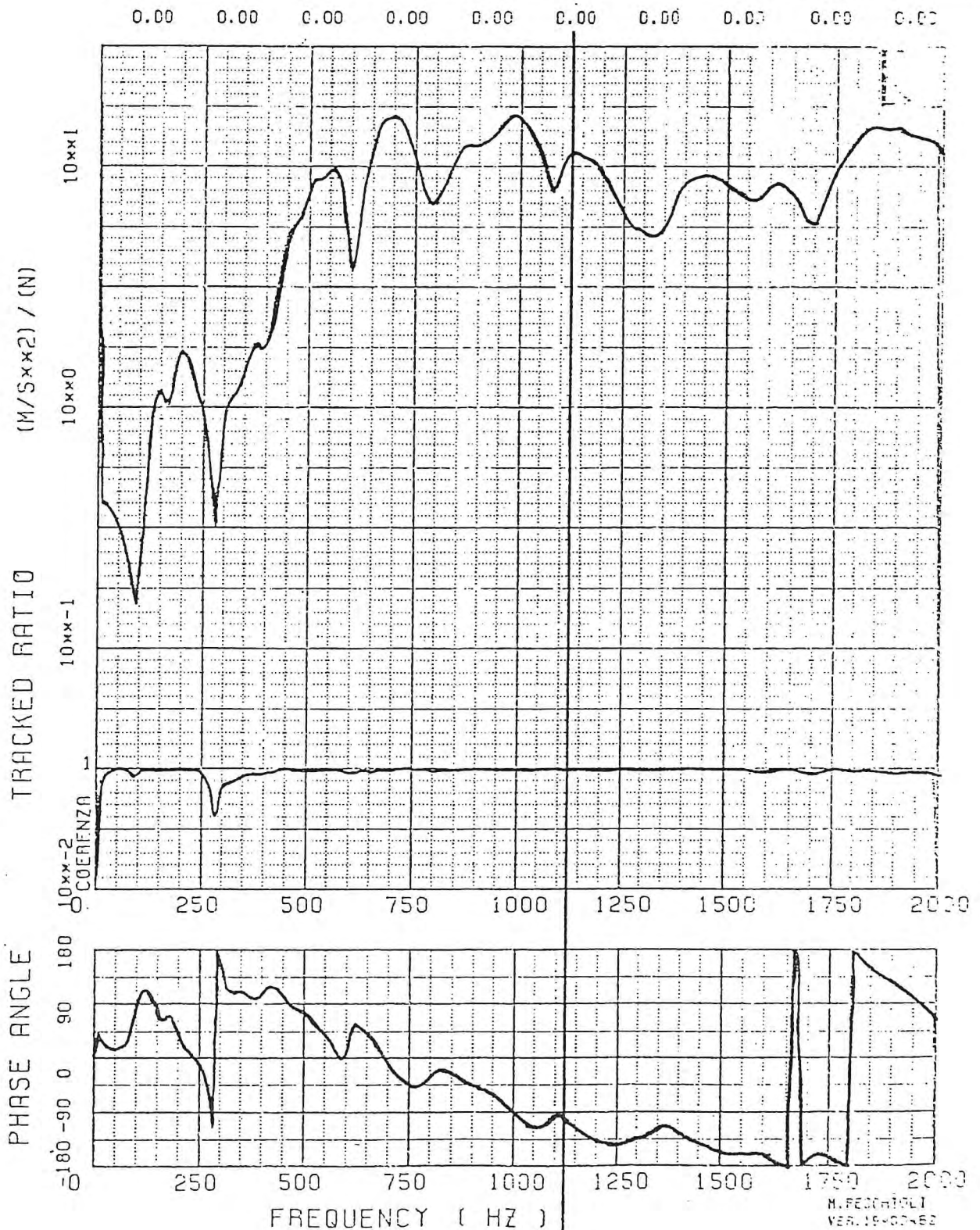
MC04V+

STATE : 0

ECCITAZIONE: MC06V+

21/ 4/1982

BANDWIDTH : 10.00HZ



Notiamo anche il picco a 560 Hz, che indubbiamente interagisce con la prima frequenza della cavità, abbassandola un poco.

Continuiamo dunque ad osservare qualche diagramma della funzione di trasferimento, per cercare di capire da dove viene la risonanza strutturale a 710 Hz, se è essa è accompagnata da altre e se l'ipotesi fatta per quella a 1130 Hz era corretta.

Osserviamo il tracciato che lega i punti MC 06 e MC 02 (gli attacchi anteriori della cabina), che riportiamo in Figura 62.

Per prima cosa guardiamo cosa succede a 1130 Hz: la fase è prossima ai 50° , l'intensità dell'accelerazione è bassa, per cui questo punto si trova in un nodo dell'onda di vibrazione della piastra di base.

Notiamo poi un fortissimo picco a 720 Hz, accompagnato da uno sfasamento di 180° , che segna-

Fig. 62

MODEL OF SAFETY CAB

TELAIO

O/MC02V+/MC06V/ 25

MODELLO SOSPESO, ECCITATO SUI SUPPORTI CON MARTELLO, MEDIA 5 MISURE

RISPOSTA:

MC02V+

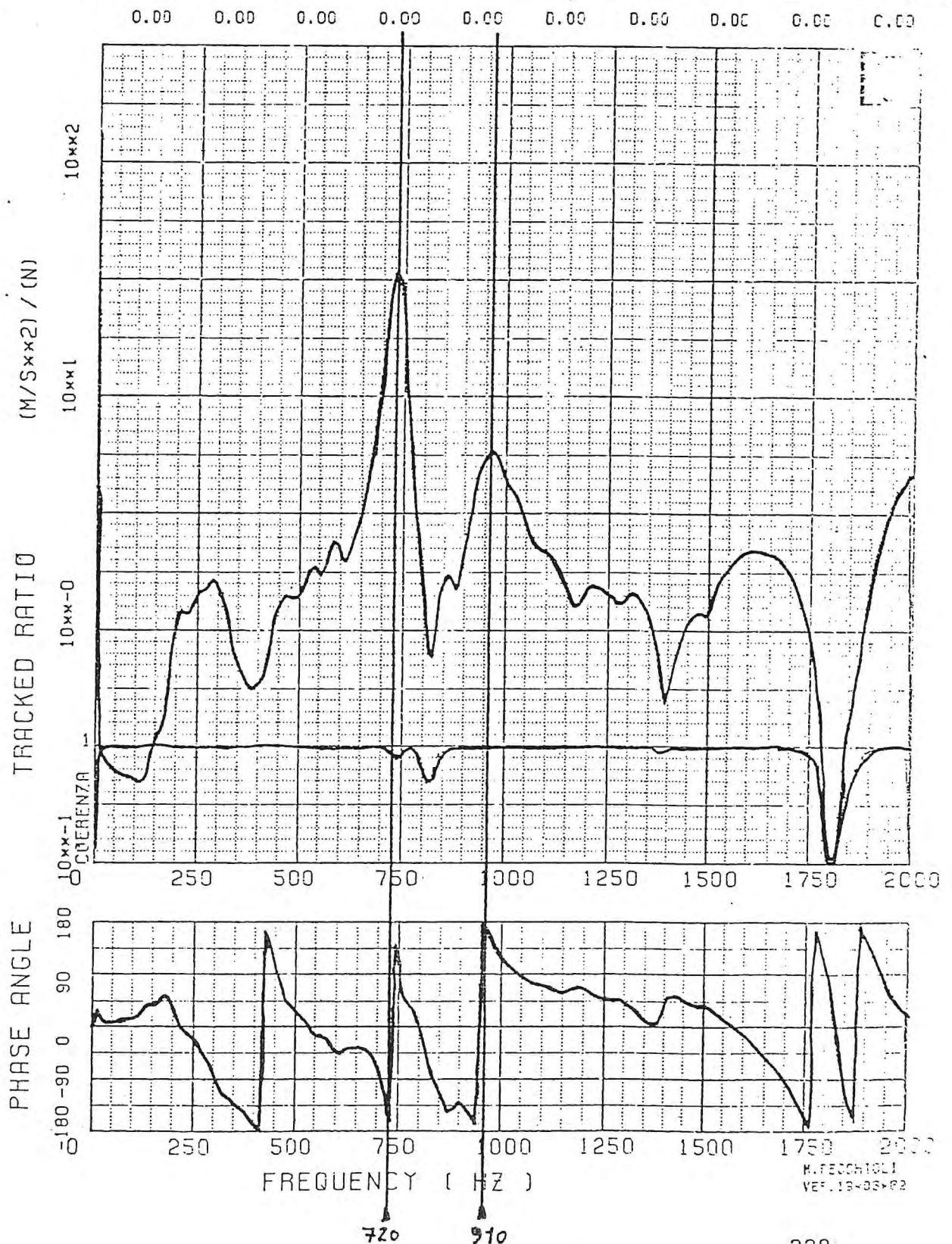
STATE : 0

ECCITAZIONE:

MC06V+

21/ 4/1982

BANDWIDTH : 10.00HZ



la un modo di vibrazione asimmetrico (pari) della piastra di fondo.

Anche nel tracciato di Figura 60 a 710 Hz la fase è 180° , segnalando che a questa frequenza il campo acustico è trascinato dal movimento meccanico.

Analoga situazione si verifica in Figura 62 a 910 Hz; possiamo dunque pensare a questi due picchi come al 2° e 3° modo dispari della piastra (non dobbiamo stupirci per la mancanza di proporzionalità fra le frequenze, poiché la velocità delle onde flessionali varia con la frequenza).

In queste ipotesi, il 1° modo dispari si avrebbe al primo sfasamento di 180° , che cade a 400 Hz, ed invece qui troviamo un buco della funzione di trasferimento.

Indipendentemente da ciò (il 1° modo potrebbe essere impedito da particolari condizioni vincolari, o da chissà quali altri motivi), possiamo dire

di aver individuato due frequenze proprie della traversa anteriore , a 720 e 910 Hz, e che entrambe trovano corrispondenza nel tracciato della funzione di risposta in frequenza (Figura 60); si noti infatti come il picco della cavità dei 1010 Hz si sposti a circa 950 Hz per la presenza della frequenza strutturale dei 910 Hz.

Per un progettista si porrebbe ora il problema di modificare la struttura della parte anteriore, affinché ci sia maggiore spostamento in frequenza fra questi ultimi 2 picchi.

Resta da spiegare il picco a 200 Hz, ben visibile in Figura 60 nel tracciato relativo alla funzione di risposta in frequenza.

Ricordiamo a questo punto le osservazioni fatte percuotendo qua e là la struttura, ed osservando gli spettri prodotti: avevamo notato un forte picco sui 200 Hz percuotendo la fiancata sinistra, mentre percuotendo la destra si aveva un

picco sui 250 Hz.

E' dunque plausibile pensare che questa risonanza derivi dal moto della fiancata stessa. D'altronde anche l'analisi modale aveva fornito un modo proprio dei montanti laterali a 192 Hz.

Osserviamo ora il grafico della funzione di trasferimento di un punto a $3/4$ dell'altezza della fiancata sinistra: il punto MC 12, visibile in Figura 63. Notiamo che a circa 200-220 Hz compare il primo picco di intensità elevata del montante; a 350 Hz invece appare il secondo modo proprio del montante, anch'esso visibile in Figura 60, nel tracciato continuo.

In questi modi il campo acustico dovrebbe conservare la fase del movimento strutturale, poiché esso viene trascinato globalmente dalla struttura e non si dovrebbero creare onde stazionarie all'interno (sarebbero troppo lunghe). Notiamo, pertanto, sempre in Figura 60, che sia a 200 Hz

Fig. 63

MODEL OF SAFETY CAB

TELAIO

O/MC12T+/620/ 23

MODELLO SOSPESO, ECCITATO SUI SUPPORTI CON MARTELLO, MEDIA 5 MISURE

RISPOSTA:

MC12T+

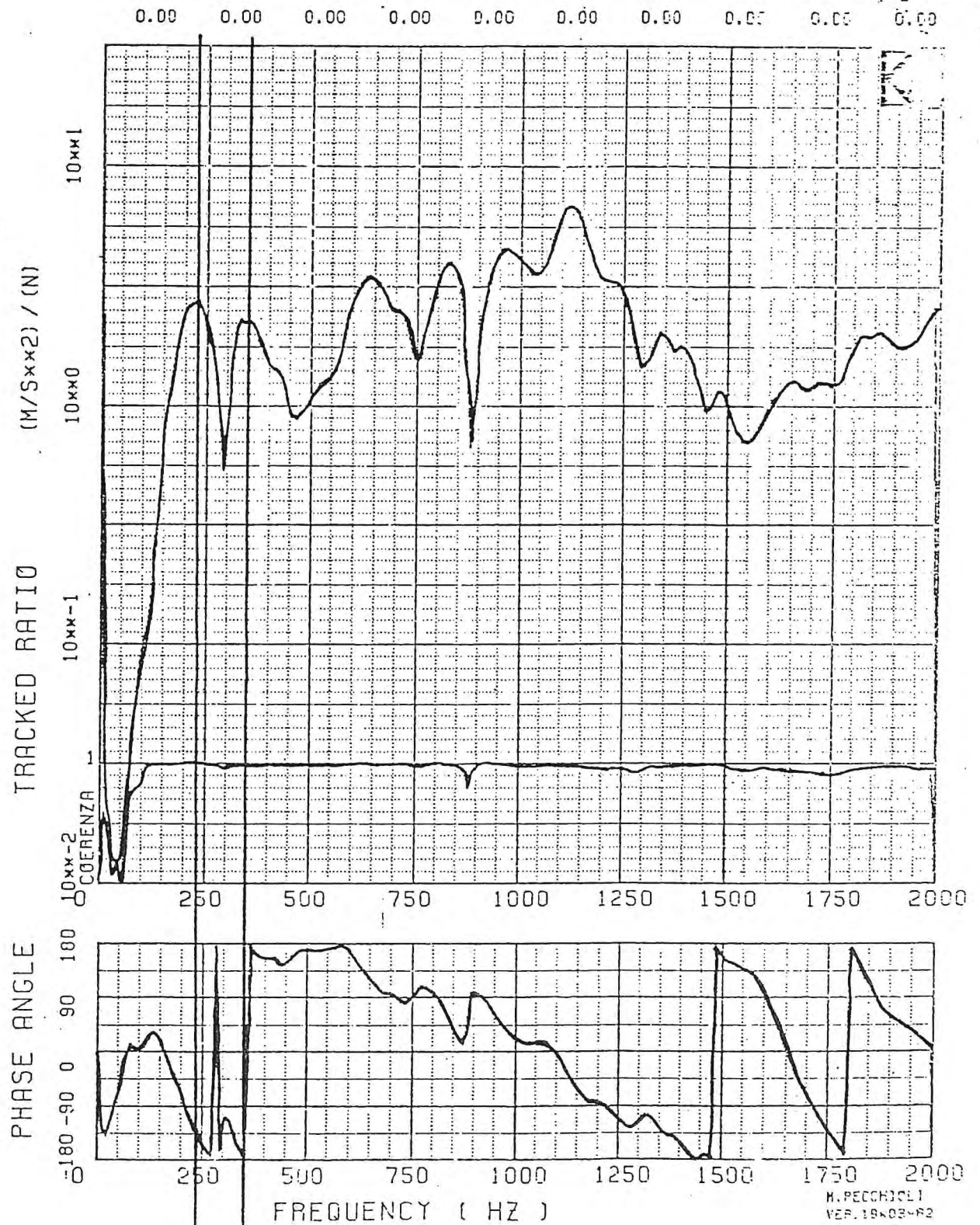
STATE : 0

ECCITAZIONE:

MC06V+

21/ 4/1982

BANDWIDTH : 10.00HZ



M. PECCHIOGLI
VER. 15/03/82

sia a 350 lo sfasamento è uguale a quello di Figura 63, e dunque abbiamo conferma dell'origine dei picchi a 200 e 350 Hz.

Andiamo poi a vedere il movimento dell'estremo superiore del montante, indicato con MC 14, e visibile in Figura 64: a 200 Hz c'è il solito 1° picco ed è sfasato di -90° . Il 2° picco è a frequenza un pò più alta che nel punto MC 12, cioè sui 400 Hz, ma è sempre sfasato di 180° .

Osservando, infine, il tracciato dell'estremo superiore del montante destro (MC 15, visibile in Figura 65), troviamo che la situazione è identica, con uno slittamento in frequenza di 70 Hz verso l'alto, come già avevamo capito dalle prove di sollecitazione diretta.

Non sappiamo perché nel tracciato di Figura 60 non appaiono i picchi prodotti dal montante destro, mentre appaiono quelli del montante sinistro: forse il fatto di eccitare la struttura dal-

Fig. 64

MODEL OF SAFETY CAS

TELAID

C/MC:4T+/E2C/ 22

MODELLO SOSPESO, ECCITATO SUI SUPPORTI CON MARTELLO. MEDIA 5 MISURE

RISPOSTA: MC14T+ STATE : 0
ECCITAZIONE: MC06V+

21/ 4/1982

BANDWIDTH : 10.00HZ

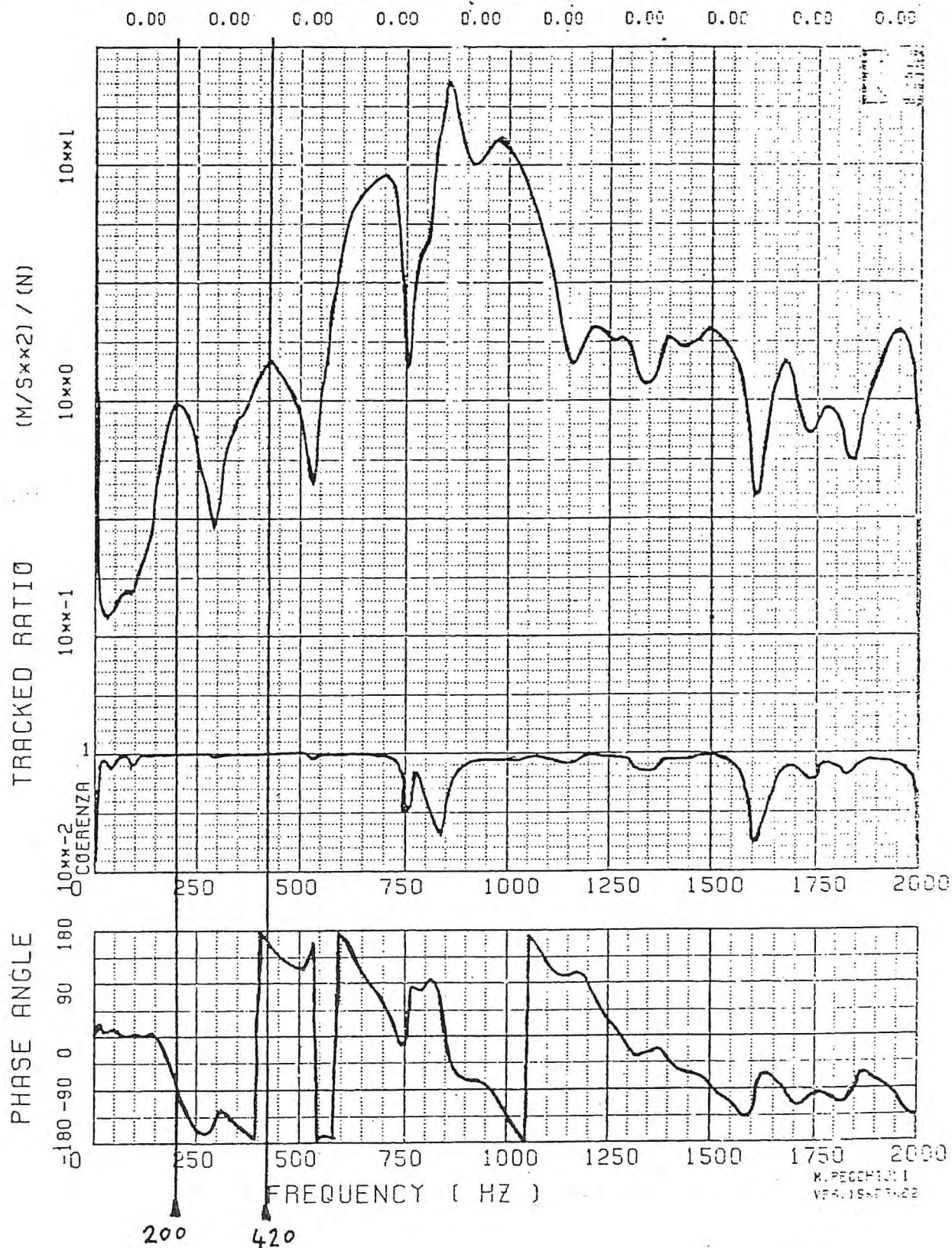
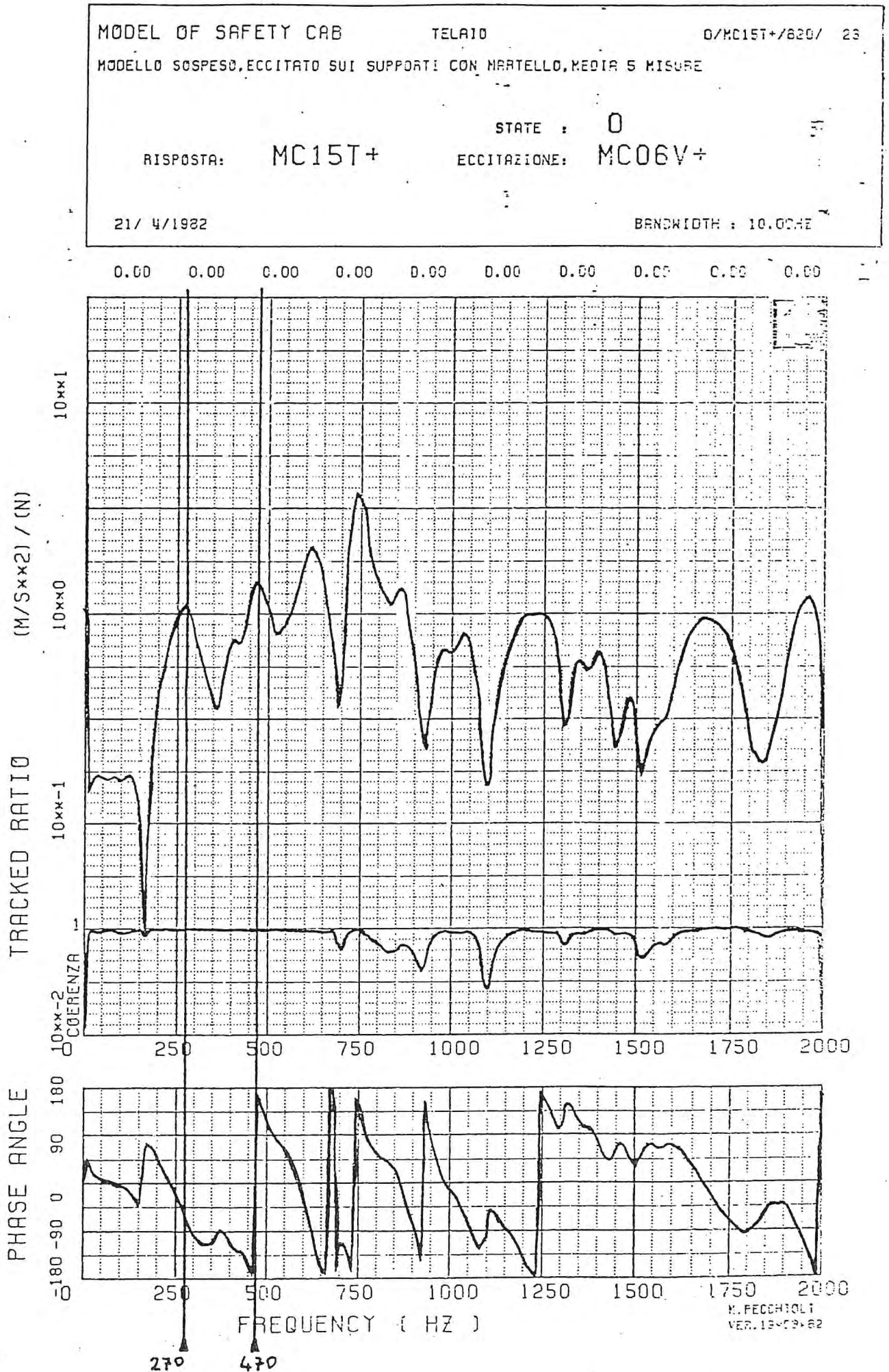


Fig. 65



la parte sinistra manda in vibrazione solo il montante corrispondente.

Abbiamo dunque individuato nel montante sinistro l'origine dei modi propri strutturali a 200 e a 350-400 Hz.

A questo punto la quantità di informazioni raccolte è già sufficiente; osservando ancora una volta il tracciato continuo della Figura 60, siamo in grado di giustificare l'origine di tutti i picchi fino a 1200 Hz; procedendo da sinistra a destra abbiamo:

- 10 Hz: moto rigido della cabina sui supporti elastici;
- 200 Hz: 1° modo proprio di vibrazione flessionale del montante sinistro;
- 370 Hz: 2° modo proprio di vibrazione flessionale del montante sinistro;
- 570 Hz: 1° modo proprio di risonanza della cavità (diagonale maggiore, Figura 51); esso è ecci-

tato bene dalla traversa anteriore che ha il primo modo pari a 550 Hz;

- 710 Hz: 2° modo proprio di vibrazione flessionale della traversa anteriore;
- 950 Hz: sovrapposizione del 3° modo proprio flessionale della traversa anteriore (920 Hz) e del 2° modo proprio della cavità (1010 Hz);
- 1130 Hz: sovrapposizione del 4° modo proprio flessionale (simmetrico) della traversa anteriore e di un modo proprio "a sella" della cavità, lungo la diagonale maggiore, nella zona centrale della cabina (visibile in Figura 52 in basso a destra).

Indubbiamente con considerazioni analoghe si potrebbe ricercare l'origine delle altre risonanze visibili in Figura 60, ad esempio del picco sui 1300 Hz, ecc.

Per far ciò occorrerebbero però molti più punti di rilevamento sulla struttura, poiché a

queste frequenze la lunghezza d'onda flessionale diviene confrontabile con la distanza fra 2 punti di rilevamento e non è possibile comprendere più la forma dell'onda con i dati in nostro possesso.

Abbiamo visto come in tutti i discorsi fatti divenga utilissima la conoscenza della fase, e ciò mostra chiaramente i limiti di indagini effettuate con la strumentazione tradizionale, dalle quali si ottiene soltanto il modulo delle grandezze complesse.

3-9-2 - Risultati ottenuti dal prototipo.

Analogamente alla Figura 60, in Figura 66 sono riportati il tracciato ottenuto dal MIC 2 con eccitazione in PC 06 ed il lucido che mostrale frequenze proprie ottenute con il metodo agli elementi finiti: esse sono ovviamente le stesse del modello, divise per 5.

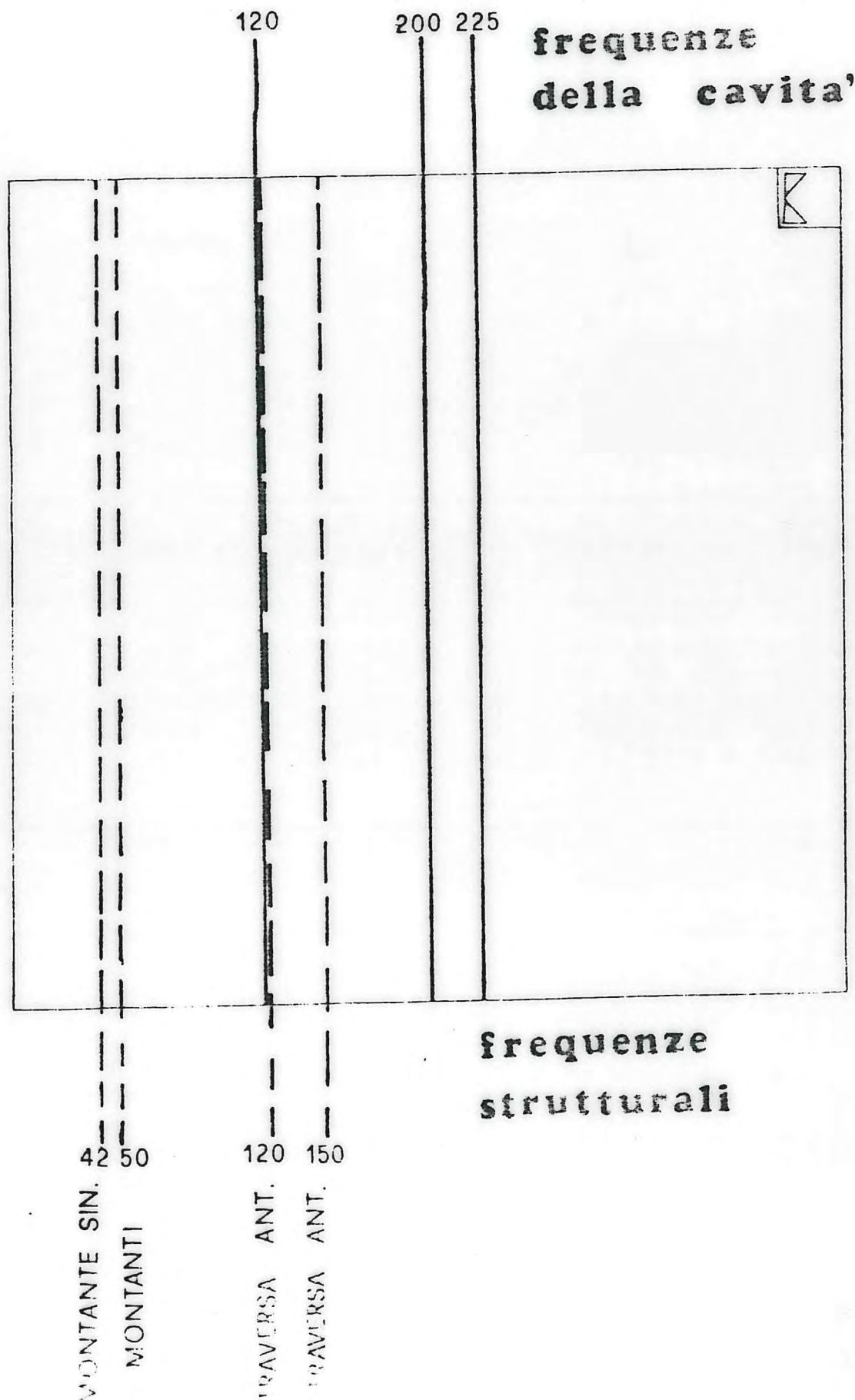


Fig. 66

PROT. OF SAFETY CAB

TELAIO

O/MIC.2./820/ 3

PROTOTIPO ECCITATO SUI SUPPORTI CON MARTELLO, MEDIA DI 10 MISURE

RISPOSTA:

MIC.2.

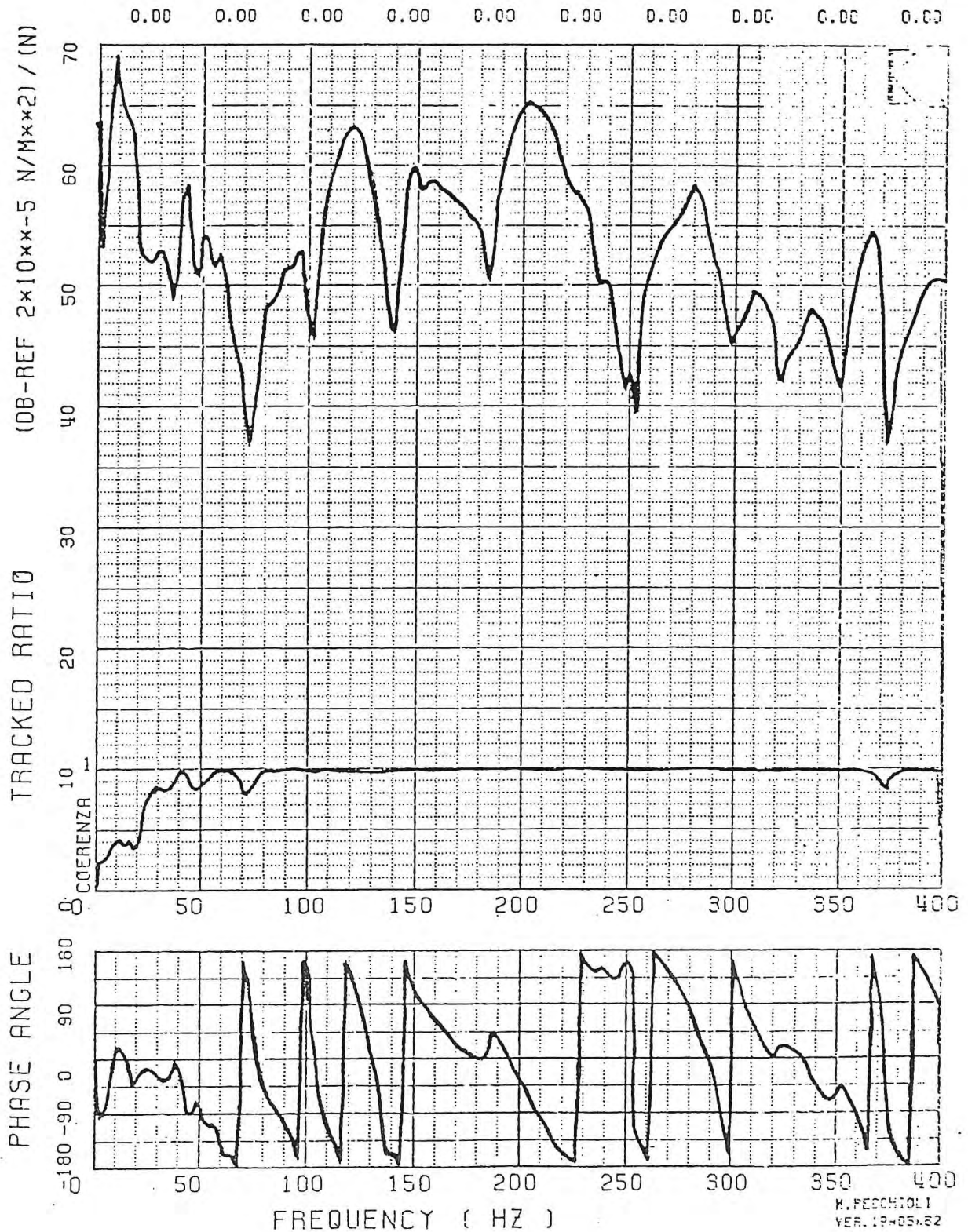
STATE : 0

ECCITAZIONE:

PC06V+

21/ 4/1982

BANDWIDTH : 2.00HZ



Scopriamo così subito che i 2 picchi a 120 e 200 Hz sono senza dubbio dovuti a risonanze della cavità; viceversa a 225 Hz manca il picco, e considerando che a questa frequenza abbiamo la 2.a risonanza longitudinale della parte centrale della cabina, andiamo a vedere nel punto PC 04 cosa succede a questa frequenza (vedi Figura 67): ci troviamo in una zona livellata, con fase pressoché nulla, segno che a questa frequenza la traversa anteriore non è sede di alcuna vibrazione propria; ecco perché questo modo di vibrazione acustico non viene eccitato.

Notiamo invece 2 forti picchi rispettivamente a 120 e 145 Hz, entrambi con fase quasi nulla e dunque relativi a moti simmetrici della piastra.

Il 1°, sovrapponendosi alla risonanza della cavità, produce chiaramente la forte risonanza visibile in Figura 66 a 120 Hz; essa è sfasata di 180°, e lo sfasamento è dovuto al campo acusti-

Fig. 67

PROT. OF SAFETY CAB

TELAIO

O/PC04V+/620/ 5

PROTOTIPO ECCITATO SUI SUPPORTI CON MARTELLO. MEDIA DI 10 MISURE

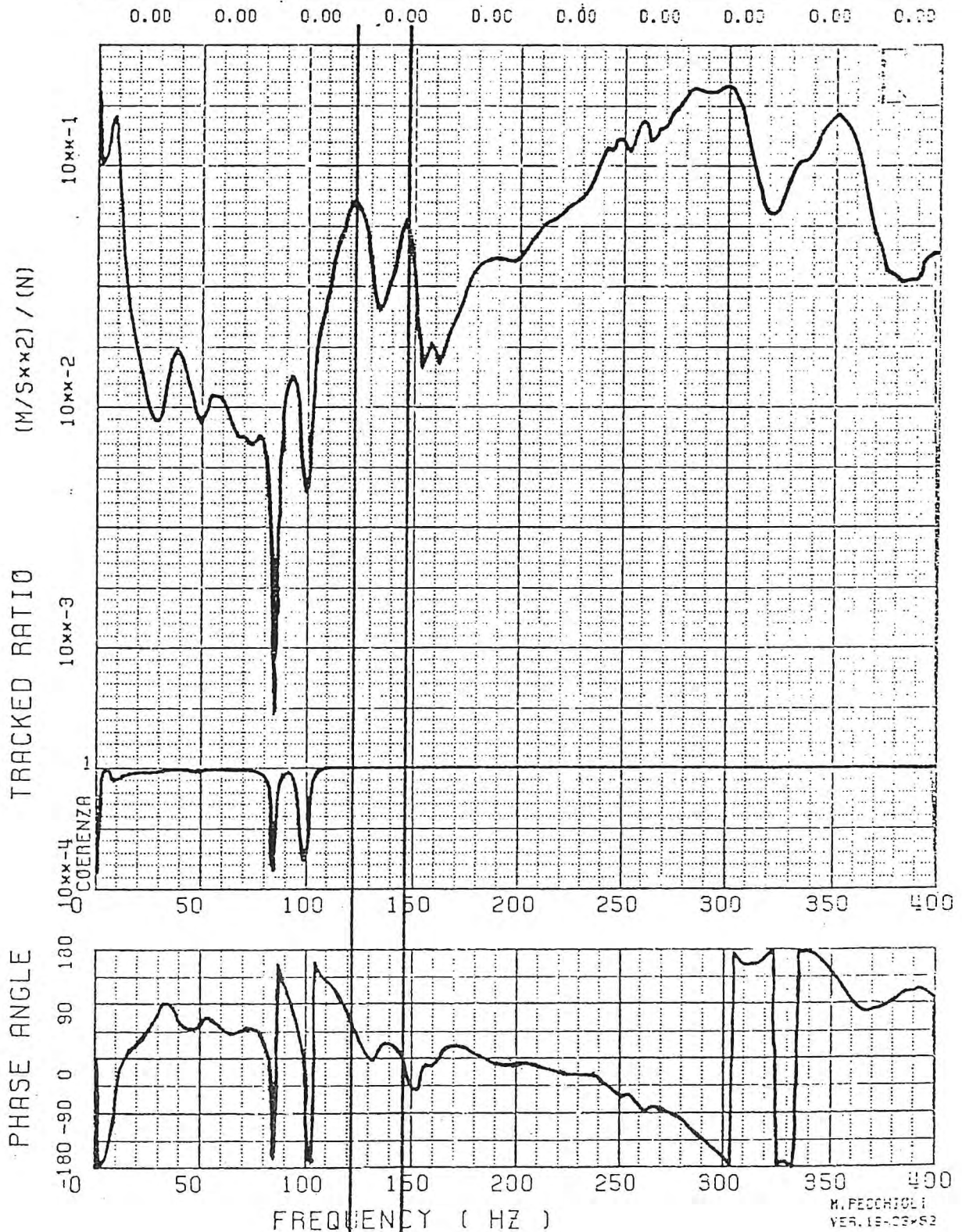
RISPOSTA: PC04V+

STATE : 0

ECCITAZIONE: PC06 V+

21/ 4/1982

BANDWIDTH : 2.00HZ



co, come si vede chiaramente dalla Figura 51.

A 145 Hz si potrebbe eccitare il 1° modo secondo la diagonale minore della sezione centrale della cavità (157 Hz), visibile in Figura 52 in basso a sinistra; così non si spiega però lo sfasamento di 180° del picco di Figura 66.

Evidentemente ad eccitare questa frequenza sono soprattutto altre parti della piattaforma (ad esempio, PC 02), le quali si muovono sfasate appunto di 180° rispetto all'eccitazione.

Il picco della Figura 66 a 145 Hz non è però pulito: sulla destra infatti si confonde con un altro picco sui 160 Hz che non proviene certo dalla zona centrale della piastra (a questa frequenza infatti in Figura 67 c'è un buco).

Esso potrebbe provenire da un modo asimmetrico, nel qual caso sarebbe visibile nella Figura 68, che riporta le accelerazioni del punto PC 02, all'altro lato della piastra di base: qui in

effetti troviamo, oltre al picco principale sui 145 Hz, sfasato giustoappunto di 180° , un discreto picco secondario sui 160 Hz, sfasato di $+120^\circ$.

Il fatto che la fase non corrisponda a quella di Figura 66 alla stessa frequenza può essere interpretato, poiché a questa frequenza si dovrebbe avere la seconda risonanza della zona laterale della cabina (visibile in Figura 52 in alto a sinistra), la quale ha la linea nodale passante per la posizione del microfono, per cui un piccolo spostamento dello stesso rispetto alla linea nodale fa cambiare rapidamente la fase.

Notiamo anche che, sempre nella Figura 66, a 200 Hz la fase è pressoché nulla, esattamente come accade per la zona centrale della piastra (Figura 67) alla stessa frequenza. Infatti a questa frequenza l'onda stazionaria ha 2 inversioni, come mostrato dalla Figura 52 a destra, conserva dunque le fasi.

Nella Figura 68, invece, a questa frequenza c'è un profondo buco, sempre con fase nulla, confermando che questo è un modo simmetrico della piastra di fondo.

Torniamo alla Figura 66, e vediamo quali picchi restano da giustificare: c'è un fortissimo picco a 10 Hz circa, che dovrebbe essere dovuto al moto rigido della cabina sulle sospensioni elastiche; ciò è confermato dalla fase nulla.

C'è poi una serie di piccoli picchi, a 42, 50, 58 Hz; quello dei 50 Hz è sicuramente dovuto ad un modo proprio dei montanti: vedasi la Figura 69, relativa al punto PC 12 situato a $3/4$ d'altezza del montante sinistro. Notiamo che a questa frequenza la fase è infatti -90° sia per il microfono che il punto PC 12 e ciò conferma l'origine della risonanza.

Il picco a 58 Hz è prodotto sempre dal montante sinistro, giacché a questa frequenza notiamo

Fig. 68

PROT. OF SAFETY CAB

TELAIO

0/PC02V+/320/ 5

PROTOTIPO ECCITATO SUI SUPPORTI CON MARTELLO. MEDIA DI 10 MISURE

STATE : 0

RISPOSTA: PC02V+

ECCITAZIONE: PC06 V+

21/ 4/1982

BANDWIDTH : 2.00Hz

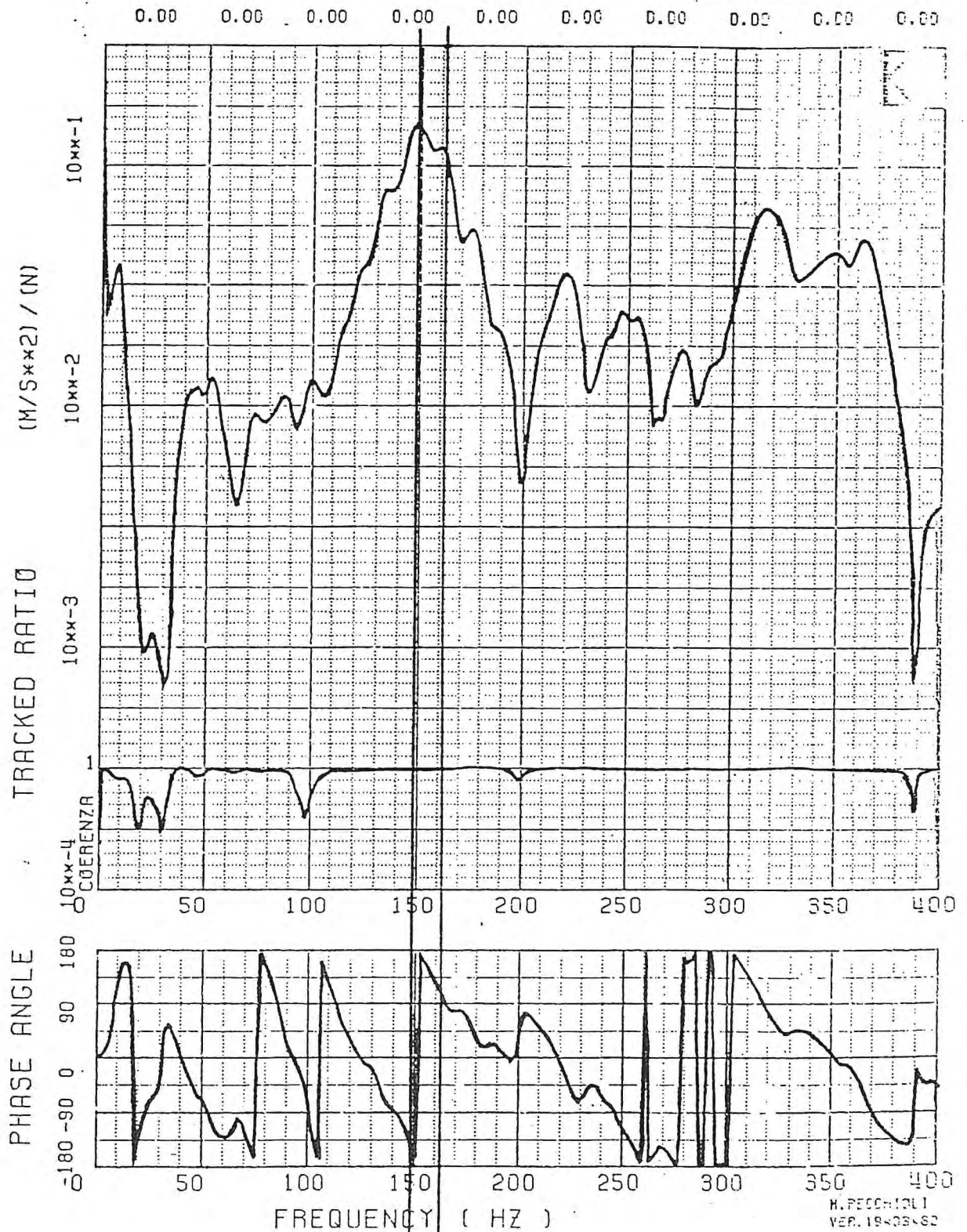


Fig. 69

PROT. OF SAFETY CAB

TELAIO

O/PC12T+/620/ 5

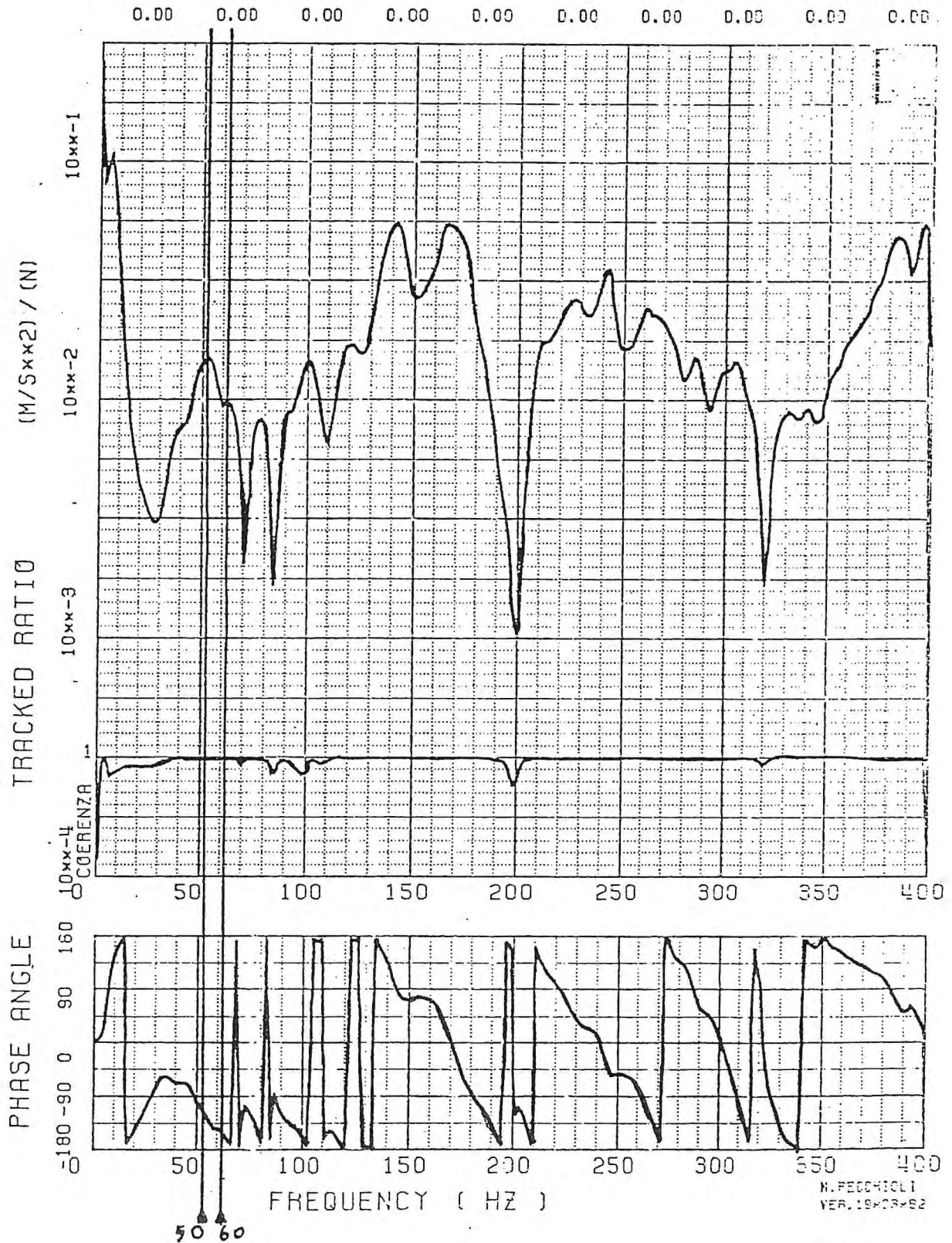
PROTOTIPO ECCITATO SUI SUPPORTI CON MARTELLIO, MEDIA DI 10 MISURE

RISPOSTA: PC12T+

STATE : 0
ECCITAZIONE: PC06 V+

21/ 4/1982

BANDWIDTH : 2.00HZ



ancora un piccolo picco in Figura 69, accompagnato da una fase di 120° , fase coincidente con quella di Figura 66.

Infine il picco a 42 Hz è dovuto ad un moto dispari del montante con il massimo all'estremità superiore dello stesso ed è visibile in Figura 70, relativo appunto al punto PC 14. La fase è -70° e coincide con quella della Figura 66.

Inoltre anche in Figura 70 si vede il picco a 50 Hz, comune alla Figura 69, anche qui con fase di -90° ; a questa frequenza dunque il montante si muove probabilmente tutto in fase, il tetto si sposta alternativamente a destra e a sinistra della piastra di base.

L'ultimo picco da giustificare, in Figura 66, è quello a 95 Hz; osservando le Figure 67, 68, 69 e 70 notiamo che a questa frequenza il picco è presente, bene o male, in tutte e quattro.

Le fasi sono tutte diverse fra loro, mentre

Fig. 70

PROT. OF SAFETY CAB

TELAIO

O/PC14T+/820/ E

PROTOTIPO ECCITATO SUI SUPPORTI CON MARTELLO, MEDIA DI 10 MISURE

RISPOSTA:

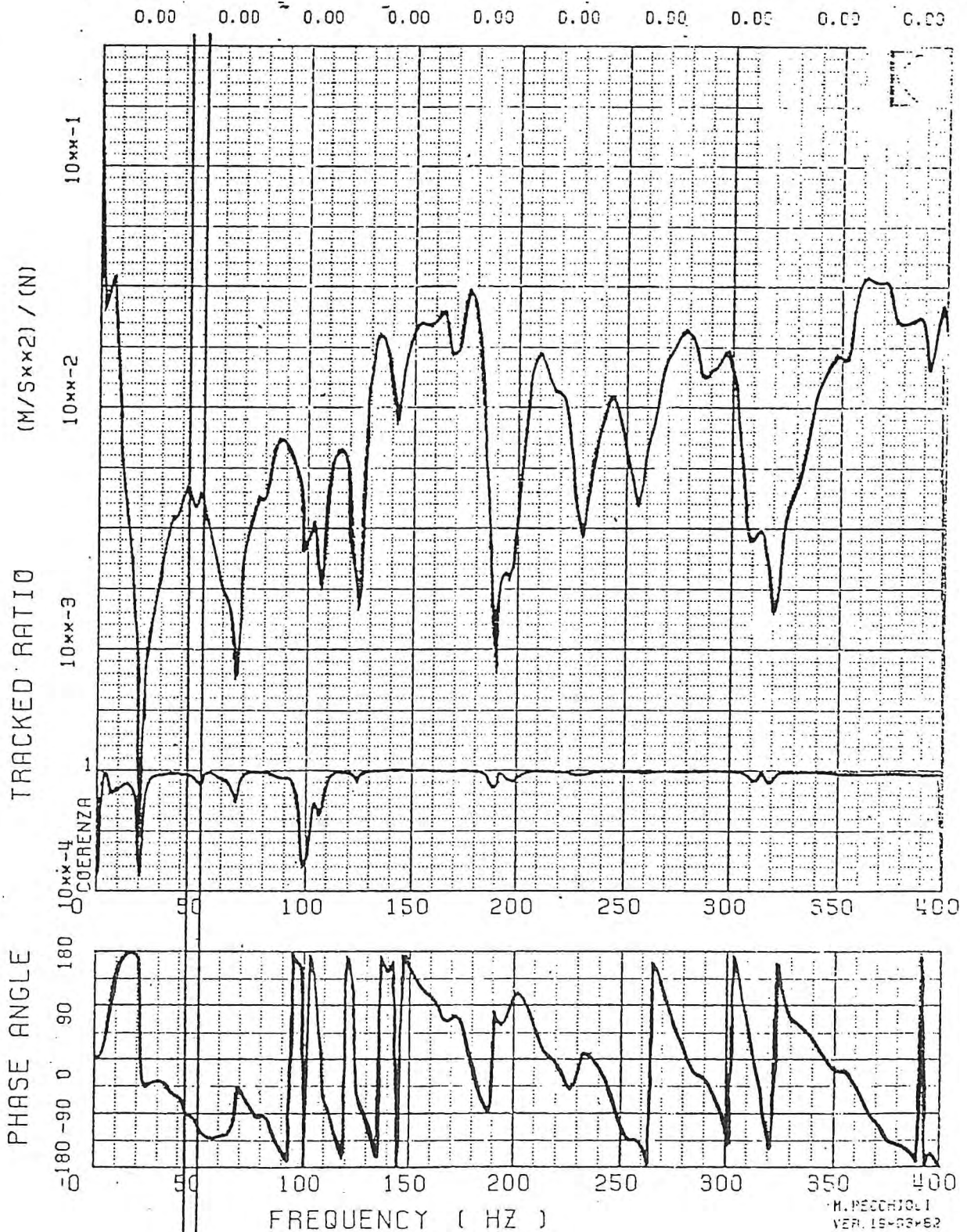
PC14T+

STATE : 0

ECCITAZIONE: PC 06 V+

21/ 4/1982

BANDWIDTH : 2.00HZ



in Figura 66 la fase valeva 180° ; non siamo pertanto in grado di stabilire, con i dati che abbiamo, quale sia l'origine di questo picco.

Osserviamo infine il tracciato del punto PC 15, cioè l'estremo superiore del montante destro, riportato in Figura 71; si nota anzitutto il forte picco a 50 Hz, con fase -90° , dovuto, come abbiamo visto, ad un moto di destra-sinistra dell'intero tetto rispetto alla piattaforma e che qui non appare disturbato da altre oscillazioni proprie del montante.

Notiamo poi il grosso picco sui 150 Hz, che va a sovrapporsi alla risonanza propria della piastra di base, e che certamente contribuisce al picco presente in Figura 66 a questa frequenza.

Inoltre il picco dei 215 Hz potrebbe produrre la "dentellatura" del lato destro del picco a 200 Hz della Figura 66.

Alla fine siamo stati in grado, seppure con

Fig. 71

PROT. OF SAFETY CAB

TELAIO

O/PC15T+/820/ 5

PROTOTIPO ECCITATO SUI SUPPORTI CON MARTELLO, MEDIA DI 10 MISURE

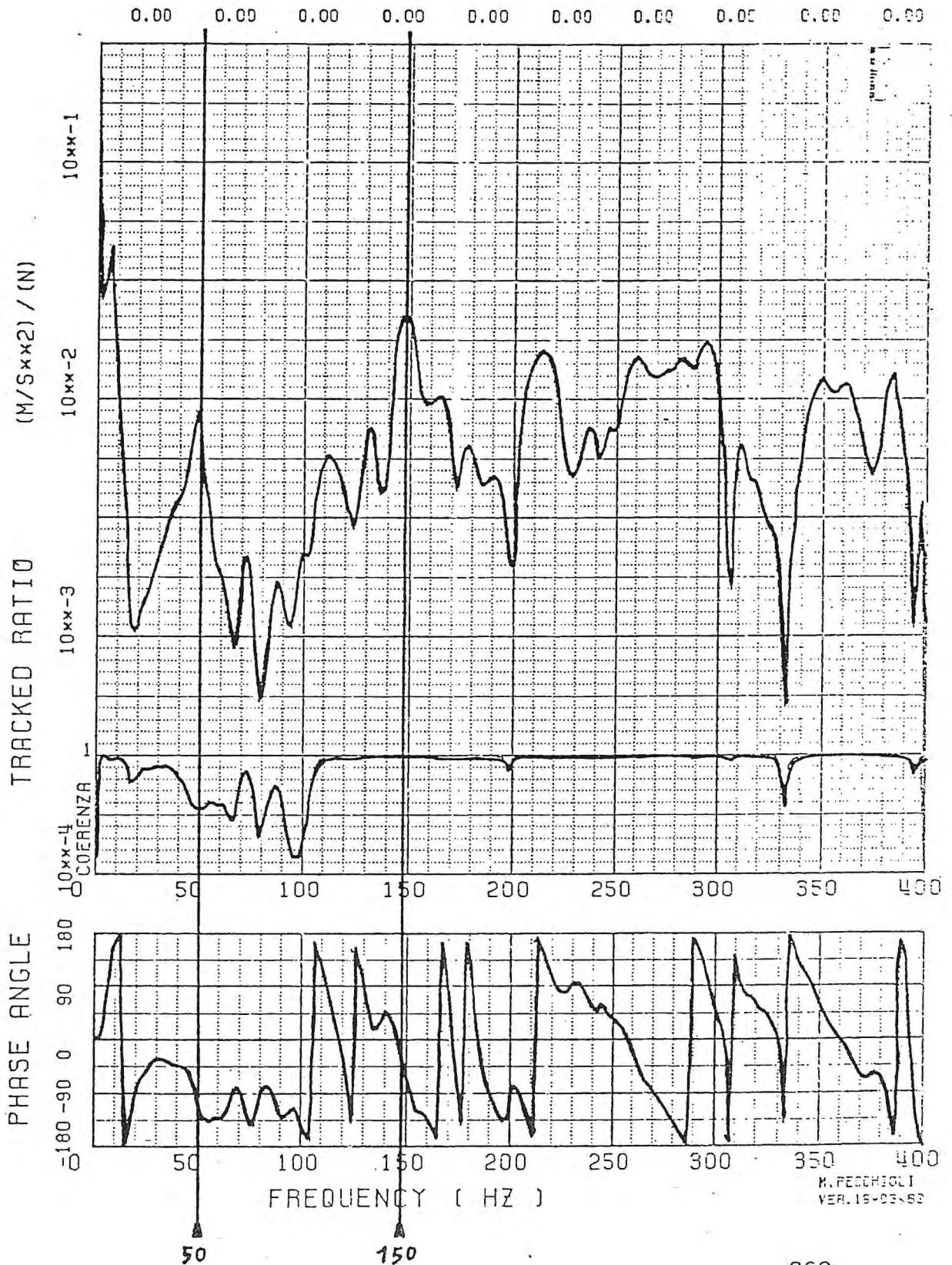
STATE : 0

RISPOSTA: PC15T+

ECCITAZIONE: PC 06 V+

21/ 4/1982

BANDWIDTH : 2.CCME



qualche difficoltà, di giustificare il tracciato della Figura 66; al crescere della frequenza infatti troviamo:

- 10 Hz: moto rigido della cabina sui supporti elastici;
- 42,58 Hz: modi flessionali propri del montante sinistro;
- 50 Hz: oscillazione destra-sinistra del tetto rispetto alla base;
- 95 Hz: origine dubbia;
- 120 Hz: 1.a frequenza propria della cavità, eccitata soprattutto dalla traversa anteriore (primo modo, simmetria) e in parte dal montante destro;
- 145 Hz: 2.a frequenza propria della traversa anteriore (antisimmetria);
- 160 Hz: 3.a frequenza propria della traversa anteriore;
- 200 Hz: 2.a frequenza propria della cavità, eccitata in parte dal montante destro, in parte direttamente dalla zona sollecitata dal martello;

- 215 Hz: risonanza propria del montante destro, che allarga sulla destra il picco della cavità dei 200 Hz.

A questo punto il progettista cercherebbe probabilmente di far spostare la prima frequenza propria della traversa anteriore, che coincide proprio con la prima frequenza propria della cavità.

3-9-3 - Comparazione delle conclusioni ottenute.

A questo punto ci dobbiamo porre questa domanda: dall'osservazione del modello, il nostro progettista sarebbe stato aiutato o fuorviato?

Osservando le due tabelle riassuntive ottenute nei paragrafi precedenti, notiamo che:

1. il moto rigido della cabina sui supporti elastici non è stato correttamente riprodotto in scala;

2. la prima vibrazione propria dei montanti laterali è stata esattamente predetta;
3. il picco dei 370 Hz del modello corrisponde probabilmente a quello dei 95 Hz del prototipo e in questo caso il risultato è mediocre;
4. la prima frequenza propria della cavità è stata correttamente individuata, ma nel modello essa viene leggermente ridotta di frequenza poiché la piastra risuona sui 560 Hz invece che sui 600; comunque l'errore è piccolo;
5. la seconda frequenza propria della traversa anteriore viene ancora perfettamente prevista, rispettivamente a 710 e 145 Hz;
6. la terza frequenza propria della traversa anteriore subisce nel modello un certo incremento di frequenza: infatti si trovano rispettivamente a 910 e 160 Hz;
7. la seconda frequenza propria della cavità è perfettamente corrispondente (200-1000 Hz);

8. infine, nel modello compare una risonanza simmetrica della traversa anteriore, a 1130 Hz, che non trova corrispondente nel prototipo.

Si vede dunque come anche dal modello si siano ottenute numerose utili indicazioni, spesso coincidenti con quelle ottenute dal prototipo.

Gli slittamenti di frequenza sono per lo più piccoli e gli effetti dell'interazione acustico-strutturale risultano ben corrispondenti.

Probabilmente sarebbe necessario investigare ulteriormente con misure più estese i perché di certe piccole differenze; comunque lo scopo iniziale del lavoro appare raggiunto, vista la plausibilità dei risultati ottenuti con un modello pur realizzato con molte approssimazioni, con attrezzature limitate ed anche con alcuni difetti.

La qualità dei risultati ottenuti in questo modo, ci rende pertanto sicuri che un modello realizzato con molta cura, soprattutto nell'unione

della parti fra loro, è in grado di dare indicazioni della massima precisione e di assoluta affidabilità.

B I B L I O G R A F I A

- [1] - R.L. BANNISTER, Structural models for vibration control, Noise control engineering, March-April, 84-92, (1975).
- [2] - L.L. BERANEK, Noise and vibration control, McGraw-Hill, N.Y., (1971).
- [3] - E. BUCKINGHAM, Model experiments and the form of empirical equations, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs., Vol.37, pp.263-296, (1915).
- [4] - A. CARPENTIERI, La geometria delle masse, Pitagora Editrice, Bologna, (1981).
- [5] - D. FIRTH, P.G. BENTLEY, R. ROWLEY, M.J. BEESLEY, An Acoustic vibration model of a fast reactor, B.N.E.S., Vibration in nuclear plant, Keswick, U.K., (May 1978).
- [6] - W. FROUDE, Brit. Assoc. Rept. (1872), p.118, (1874) p.249.
- [7] - G. GALILEI, Two New Sciences, (1638).
- [8] - D.E. HUDSON, Scale models principles. Shock and vibration handbook, Vol.2, 27, McGraw-Hill, N.Y., (1961).
- [9] - M.C. JUNGER, D. FEIT, Sound, structures and their interaction, M.I.T. Press, Cambridge, (1970).

- [10] - GARY H. KOOPMANN, HENRY BENNER, Method for computing the sound power of machines based on the helmholtz integral, *Journal of Acoustic Society of America*, 71 (1), (Jan 1982).
- [11] - A.E.H. LOVE, On the small free vibrations and deformations of thin elastic shells, *Phil. Trans. Roy. Soc., London* 17A, 491-546, (1888).
- [12] - I. NEWTON, Principia, Libro 2°, Sez. 7, PPDP 32.
- [13] - G. PAGLIARINI, R. POMPOLI, The Sound pressure level within a cylindrical chamber with a sinusoidal driven end wall, *Proceeding of "International Conference on recent advances in structural dynamics"*, University of Southampton, (July 1980).
- [14] - M. PECCHIOLI, The data acquisition and processing system of italiana keller company at Santhià. Experiences and results, *Unikeller* (1981).
- [15] - M. PETYT, J. LEA, G.H. KOOPMANN, A finite element method for determining the acoustic modes of irregularly shaped cavities, *Journ. of Sound and vibr.*, 45, p.495-502, (1976).
- [16] - D. REYNOLDS, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, pp.174-935, (1883).
- [17] - U. RIVENEAS, Design and acoustic tests of a dynamically scaled nuclear reactor gas circuit structure, *University of Southampton Ph. D. Thesis*, (1972).
- [18] - SAVART, *Ann. Chim., Paris*, (1825).
- [19] - M.N. SAYHI, Y. OUSSET, Solution of radiation problems by collocation of integral formulations in terms of single and double layer potentials, *Journ. of Sound and vibr.*, 74(2), 187-204, (1981).

- [20] - W. SOEDEL, Similitude approximations for vibrating thin shells, J.A.S.A., 49, 5, (2), 1535-1541, (1971).
- [21] - S. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKI, Theory of plates and shells, pp.81-83, McGraw-Hill, N.Y., (1959).
- [22] - J.A. WOLF, J. RAND, D.J. NEFSKE, Nastran Modeling and analysis of rigid and flexible walled acoustic cavities, Nasa TM-X 3278, 6151-631, (1975).
- [23] - D.V. WRIGHT, R.L. BANNISTER, Prognosis with plastic models, part IV, Material properties and model study - Machin design, october 16, (1969).